

Diffusion thermique

Révision 1ère année :

- Premier principe de la thermodynamique
- Capacité thermique et échange de chaleur
- Les échelles thermodynamiques
- Les mécanismes de transfert de la chaleur

Objectifs :

- Diffusion de la chaleur (Loi de Fourier)
- Eq° de conservation & bilans
- Applications

Les trois mécanismes de transfert de la chaleur

Résumé simple et efficace

$$q = h\Delta T$$

where
 q is the local heat flux density [W.m^{-2}]
 h is the heat transfer coefficient [$\text{W.m}^{-2}\text{K}^{-1}$]
 ΔT is the temperature difference [K]

$$q = -k\nabla T$$

where
 q is the local heat flux density [W.m^{-2}]
 k is the material conductivity [$\text{W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$]
 ∇T is the temperature gradient [K.m^{-1}]

Convection

Conduction

Radiation

$$q = \varepsilon\sigma T^4$$

where
 q is the power radiated from an object [W.m^{-2}]
 σ is the Stefan-Boltzmann constant [$\text{W.m}^{-2}\text{K}^{-4}$]
 ε is the emissivity of the surface of a material [-]

Rq : on peut dire Conduction ou Diffusion

I - Diffusion thermique

1 - les mécanismes de transport de la chaleur

Différents mécanismes physiques permettent le transport de chaleur. (cf - 1ère année)

- **Rayonnement :** Les corps chaud émettent un rayonnement électromagnétique (infrarouge en général) comme le soleil [rayonnement du corps noir]. Celui-ci se propage à travers l'air ou même le vide jusqu'à rencontrer un corps qui l'absorbe et capte ainsi la chaleur émise (Astrophysique). On parle de **transfert par radiation**.
- **Convection :** la matière se déplaçant au sein d'un fluide, elle emporte avec elle sa « chaleur » par le biais de son agitation thermique. Cela se produit en raison de l'entraînement par le fluide en mouvement (advection) ou du fait d'une densité différente. En particulier, le fluide plus chaud étant moins dense, il va monter sous l'effet de la poussée d'Archimède.
- **Diffusion :** l'agitation thermique* se transmet de proche en proche sous l'effet des chocs aléatoires. Il est important de noter que ce processus est **isotrope** [ne dépend pas de la direction], ainsi le « chaud » ne monte pas comme avec la convection. [* E_k microscopique].

C'est ici le mécanisme de **diffusion thermique** que l'on veut modéliser c'est à dire la propagation de proche en proche de la chaleur sans qu'aucun rayonnement ou mouvement macroscopique du milieu n'y participe. On parle alors de **conduction thermique** car la chaleur est conduite au sein du matériau de proche en proche.

Phénoménologie de la diffusion :

La phénoménologie de la diffusion est simple à comprendre. La chaleur est un transfert d'agitation microscopique sous l'effet des chocs. Or on a vu en sup que l'interprétation microscopique de la température est que celle-ci quantifie l'énergie cinétique d'agitation microscopique des particules. La chaleur diffuse ainsi des zones plus chaudes (forte agitation) vers les zones plus froides (faible agitation). Si la température tend à devenir homogène, la diffusion s'arrête car l'agitation microscopique fait de même.

2 - Quantification de la diffusion de la chaleur

Définition : On peut quantifier la diffusion de la chaleur par la puissance qui traverse une surface par unité de temps : c'est donc un flux !

On note $\vec{j}_Q$ le vecteur densité de courant thermique :

$$d^3Q = (\vec{j}_Q \cdot d\vec{S}) \cdot dt$$

Alors d^3Q est la chaleur (en joule) qui traverse la surface élémentaire $d^2\vec{S}$ pendant une durée élémentaire dt .

On notera souvent : $dQ = (\vec{j}_Q \cdot d\vec{S}) dt$ cette chaleur.

Puissance thermique :

Soit dQ la chaleur qui traverse une surface Σ pendant une durée dt .

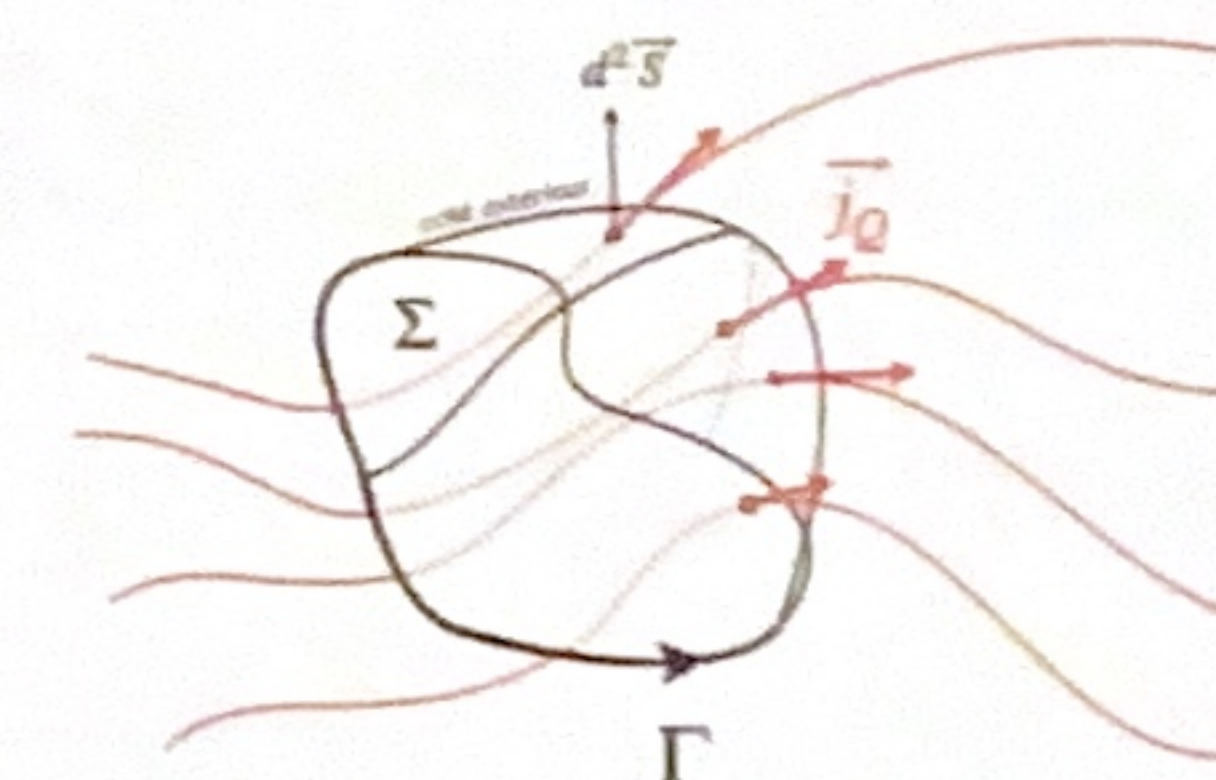
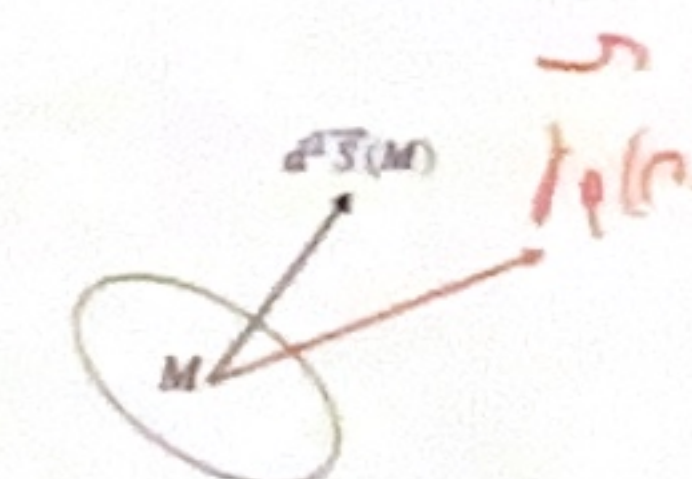
On note la puissance associée : $\mathcal{P} = \frac{dQ}{dt}$

$$\mathcal{P} = \iint_{\Sigma} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$$

W/m^2

La puissance thermique transmise est donc simplement le flux de $\vec{j}$ à travers Σ .

Rq : En régime permanent, celle-ci ne dépend que du contour Γ



3 - Loi de Fourier

On sait que les particules vont migrer des zones chaudes vers les zones froides. Notons que c'est une conséquence du 2nd principe. L'objet pertinent pour quantifier la diffusion thermique sera ainsi le gradient de température.

Loi de Fourier :

La diffusion thermique sera quantifiée par son vecteur densité de courant thermique :

$$\vec{j}_q = -\lambda \vec{\nabla}(T)$$

- Gradient $\vec{\nabla}(T)$: c'est la dérivée en 3D de la température. C'est un vecteur qui pointe dans la direction où $T(x, y, z)$ augmente le plus fortement. Sa norme indique son taux d'accroissement.
- Signe « moins » : Signifie que la diffusion s'opère des régions les plus chaudes vers les plus froides.
- Coefficient λ : Coefficient de conductivité thermique : λ quantifie la rapidité de la diffusion selon la matière traversée. λ est en $Wm^{-1}K^{-1}$.

Rq : La loi de Fourier suppose des températures qui ne soient pas excessivement faibles / fortes, et pas trop de variabilité de la température dans le temps et l'espace. C-à-d comme toujours relativement proches de l'équilibre thermodynamique local. Enfin λ dépend de la température de façon très différente d'un matériau à l'autre. Augmentation faible avec T dans l'air et l'eau.

Enfin la loi de Fourier est associée au 2nd principe de la thermodynamique :

- La chaleur s'écoule spontanément du chaud vers le froid.
- L'existence même d'un gradient de température implique qu'il y ait création d'entropie.

Valeurs tabulées pour λ
(en $Wm^{-1}K^{-1}$)

MATERIAUX	CONDUCTIVITE (W/m.K)
Terre	2,1-0,4
Terre sèche	0,14
Pierre lourde (granite)	3,49
Briques pleines	1,16
Béton plein	1,75
Fer	78,2
Aluminium	204
Eau	0,57
Glace	2,2
Air	0,025
Verre	1
Bois	0,12-0,23
Matières organiques	0,25

	CONDUCTIVITE (W/m.K)	
Gaz	0,005 - 0,18	mauvais conducteurs
Liquides (non métalliques)	0,1 - 1	conducteurs moyens
Matériaux non métalliques	0,004 - 4	conducteurs moyens
Solides Métalliques	10 - 400	excellents conducteurs

ODG

Rp : $\rightarrow$ avec la densité
meilleur isolant $\rightarrow$ Vide
air $\rightarrow$ bon isolant

	Sec	Humide	
Matériaux isolants	0,025	0,04	polyuréthane
	0,040	0,05	laine minérale, liège
	0,050	0,06	vermiculite
	0,060	0,07	perlite
Bois et dérivés	0,17	0,19	feuillets durs
	0,12	0,13	résineux
Maçonneries	0,27	0,41	briques 700-1000 kg/m ³
	0,54	0,75	briques 1000-1600 kg/m ³
	0,90	1,1	briques 1600-2100 kg/m ³
Verre	1,0	1,0	
Béton armé	1,7	2,2	
Pierres naturelles	1,40	1,60	tuft, pierre tendre
	2,91	3,40	granit, marbres
Métaux	45	45	acier
	203	203	aluminium
	384	384	cuivre

Conductivité thermique des matériaux λ en W/m.K

II - Équation de la diffusion thermique

1 - Bilan de conservation de l'énergie

Nous allons calculer l'augmentation dU de l'énergie interne au sein du volume élémentaire et l'identifier avec la chaleur reçue : $dU = \delta Q$

- dU est liée à l'augmentation de température au cours du temps. $dU = c \, dT$
- δQ : Bilan des entrées / sorties du flux thermique à travers ses frontières.

L'identification de ces 2 expressions est la traduction même de la conservation de l'énergie.

Notons que l'on envisage pas ici de travail δW quel qu'il soit, car on envisage généralement des phases denses, mais cela peut se généraliser. Enfin on notera ρ la masse volumique, c_p la capacité thermique massique, et $u(t, x)$ l'énergie interne massique.

$$dU = U(t+dt) - U(t) = \rho S dx \cdot c \frac{dT}{dt} \cdot dt = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt \cdot S dx$$

$$dU = \delta Q + \delta W = \oint \vec{j}_q \cdot d\vec{S} = - \oint \vec{j}_q \cdot d\vec{S} = - \left(\int_{\text{sortant}} \vec{j}_q \cdot d\vec{S} - \int_{\text{entrant}} \vec{j}_q \cdot d\vec{S} \right) dt$$

$$= -(-j_x(x) \cdot S) dt + 0 = j_x(x) \cdot S dt$$

1D $\delta Q = -(j_x(x+dx, t) - j_x(x, t)) S dt = -\frac{\partial j_x}{\partial x} dx S dt$

$$\text{Soit } \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$$

Rp : $dU = c \, dT$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$$

cas général :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V u \, d\tau = \int_V \frac{\partial u}{\partial t} \, d\tau = \oint \vec{j}_q \cdot d\vec{S} = \int_V \text{Div}(\vec{j}_q) \, d\tau$$

Interprétation :

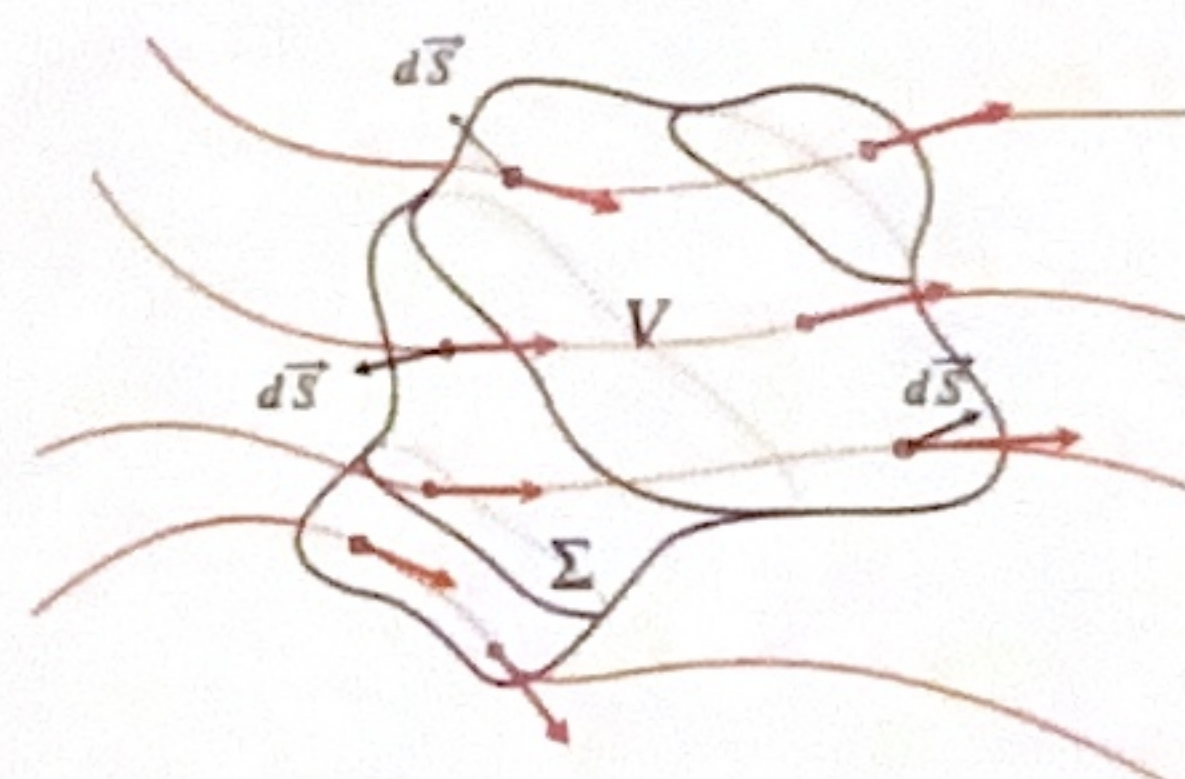
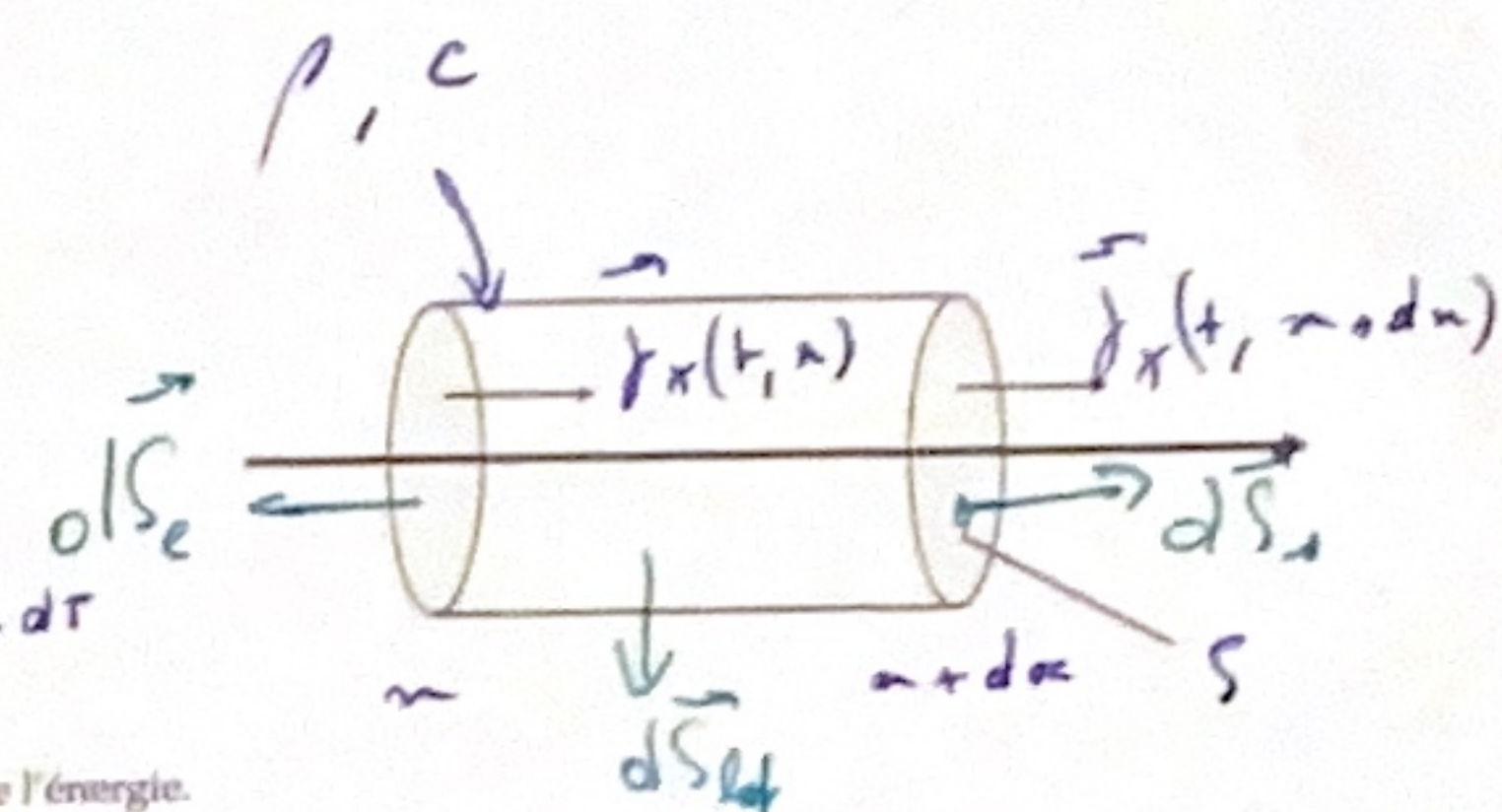
$\text{Div}(\vec{j}_q)$ est le flux sortant par unité de volume

$$\int_V \left[\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \text{Div}(\vec{j}_q) \right] d\tau = 0 \quad \forall V$$

Non invariant $t \rightarrow -t$
 $\Rightarrow$ irréversibilité de la Diffusion Thermique

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \text{Div}(\vec{j}_q) = 0 \quad (du = c \, dT)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{Div}(\vec{j}_q) = 0$$



2 - Équation de la chaleur

$$\vec{j}_q = -\lambda \vec{\nabla} T$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{Div}(-\lambda \vec{\nabla} T) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \text{Div}(\vec{\nabla} T) = 0$$

$$\text{Soit } \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T}$$

$$\boxed{D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}}$$

eq irréversible

$$\boxed{t \rightarrow -t}$$

pas la m. eq

$$\text{ODG} \quad \frac{T}{\tau} \sim \frac{\lambda}{\rho c} \frac{T}{\delta^2} \Rightarrow \boxed{\delta \sim \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c} \tau}} \sim \sqrt{D_{th} \cdot \tau}$$

Non invariant sous T_0

$$t \rightarrow -t$$

$\Rightarrow$ Diffusion irréversible.

Rq: Sauf si $(\vec{\nabla} T = 0)$ 2nd principe

$$\text{Version 1D: } \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

Isotropie

$$n \rightarrow -n$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial (-n)^2} \Rightarrow \hat{n} \text{ eq.}$$

idem: $\vec{o} \vec{n}$ selon (Δ) qq:
 $\vec{o} \vec{n} \rightarrow -\vec{o} \vec{n} \quad \forall \Delta$

3 - Terme source

Certains phénomènes peuvent nous amener à envisager des termes dits de « source » qui apportent ou retire de l'énergie au sein du système :

Apports :

- Effet Joule par dissipation électrique (fil électrique, résistance)
- Effet Joule par radioactivité (croûte terrestre)
- Rayonnement : captation en volume d'ondes électromagnétiques (Photons Visibles, UV, X, γ)
- Réaction chimique exothermique (ou tout ce qui apporte de la chaleur)

Pertes :

- Réaction chimique endothermique (ou tout ce qui prélève de la chaleur)
- Rayonnement : émission d'ondes électromagnétiques (Photons Visibles, UV, X, γ)

$\rightarrow$ cf. exemple de la nébuleuse / proto-étoile



$$\delta Q = - \oint \vec{j}_q \cdot d\vec{S} \cdot dt$$

moins à dt

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{-\text{Div}(\vec{j}_q)}_{\text{frontière}} + \underbrace{P_R}_{\text{Reçue}} - \underbrace{P_P}_{\text{Perdue}}$$

$$\boxed{\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \text{Div}(\vec{j}_q) = P_R - P_P}$$

homogène à l'ok
puissance volumique

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + P_R - P_P}$$

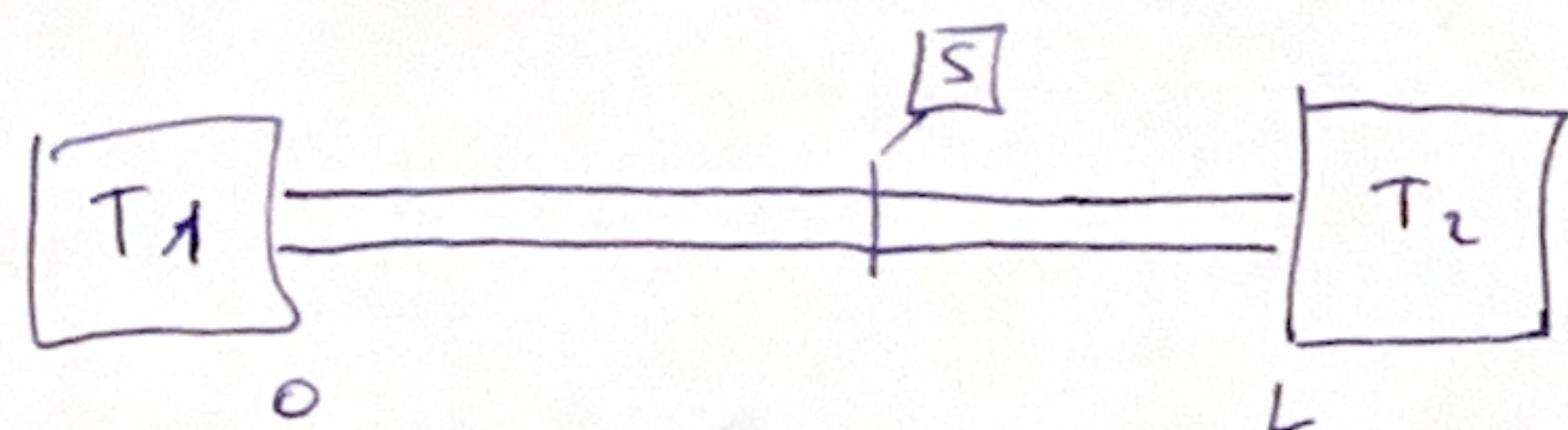
P.T.O

4) Régime Permanent

$$\text{Div}(\vec{j}_q) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \Delta T = 0$$

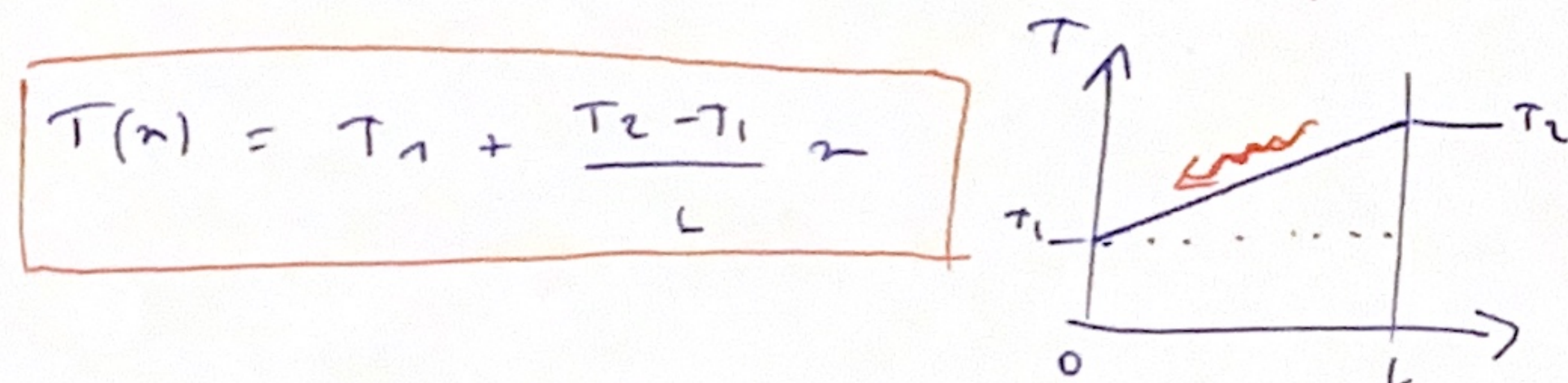
Barron ss. pert.



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow T(x) = Ax + B$$

$$T(0) = T_1 = B$$

$$T(L) = T_2 = B + AL \Rightarrow A = \frac{T_2 - T_1}{L}$$



Re: $j_q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -A < 0$ si $T_2 > T_1$

j_q va du chaud vers le froid.

$$j_q = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L}$$

$\phi = j_q \times S = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} S$ du chaud vers le froid.

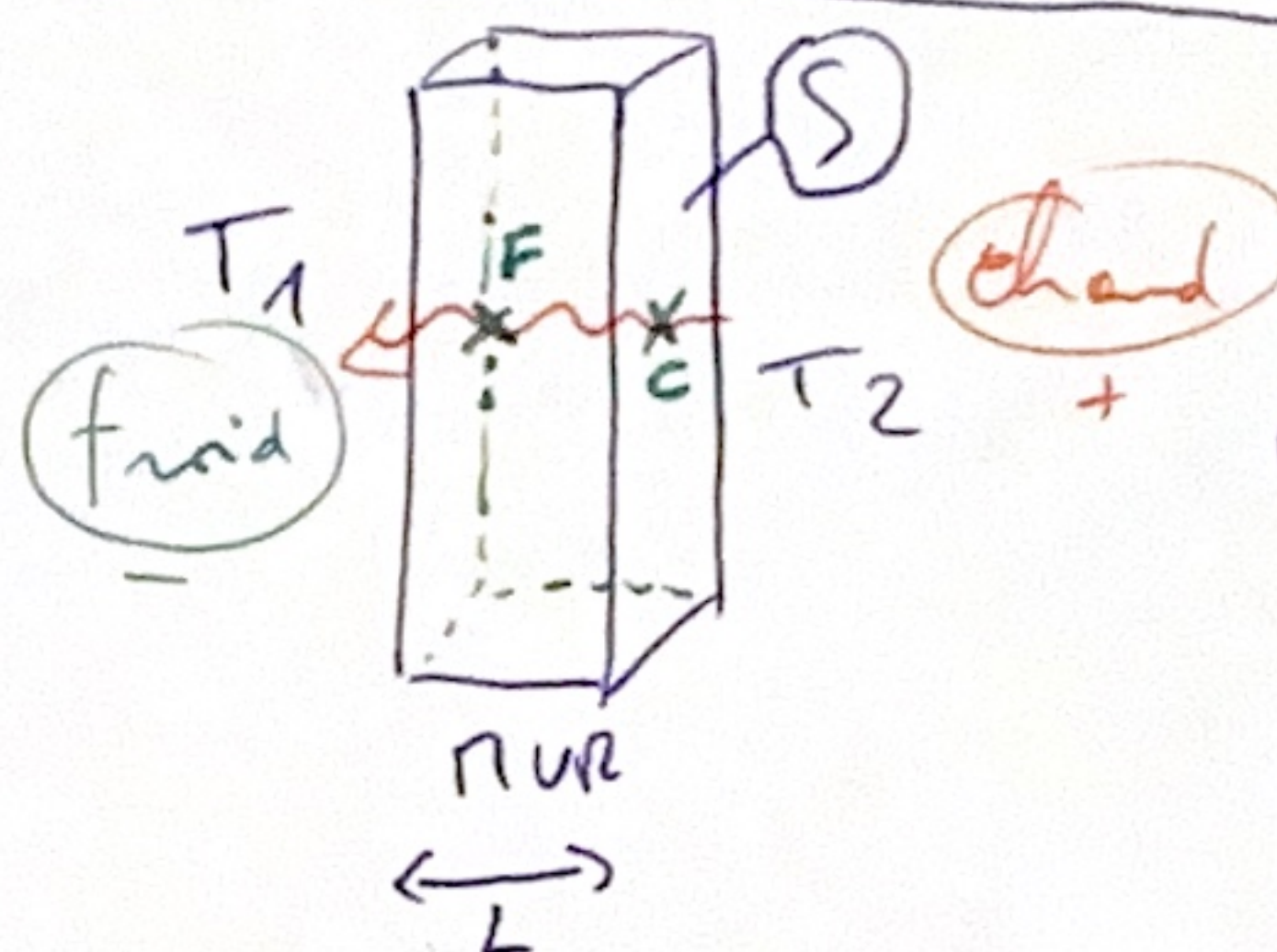
III Résistance Thermique

idée "u = R dec i" Analogie

R.P.

$$\Delta V = R_{dec} \int \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

Retour au cas précédent:



$$\phi_{th} = \int \vec{j}_q \cdot d\vec{s} = \|\vec{j}_q\| \cdot S > 0$$

du chaud vers le froid.

$$\|\vec{j}_q\| = \frac{\phi_{th}}{S} \Rightarrow \vec{j}_q = -\frac{\phi_{th}}{S} \vec{e}_x$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{dx} dx = \int_{T_1}^{T_2} -\frac{j_q}{\lambda} dx = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\phi_{th}}{\lambda S} dx$$

$$\Delta T = \frac{\phi_{th}}{\lambda S} L$$

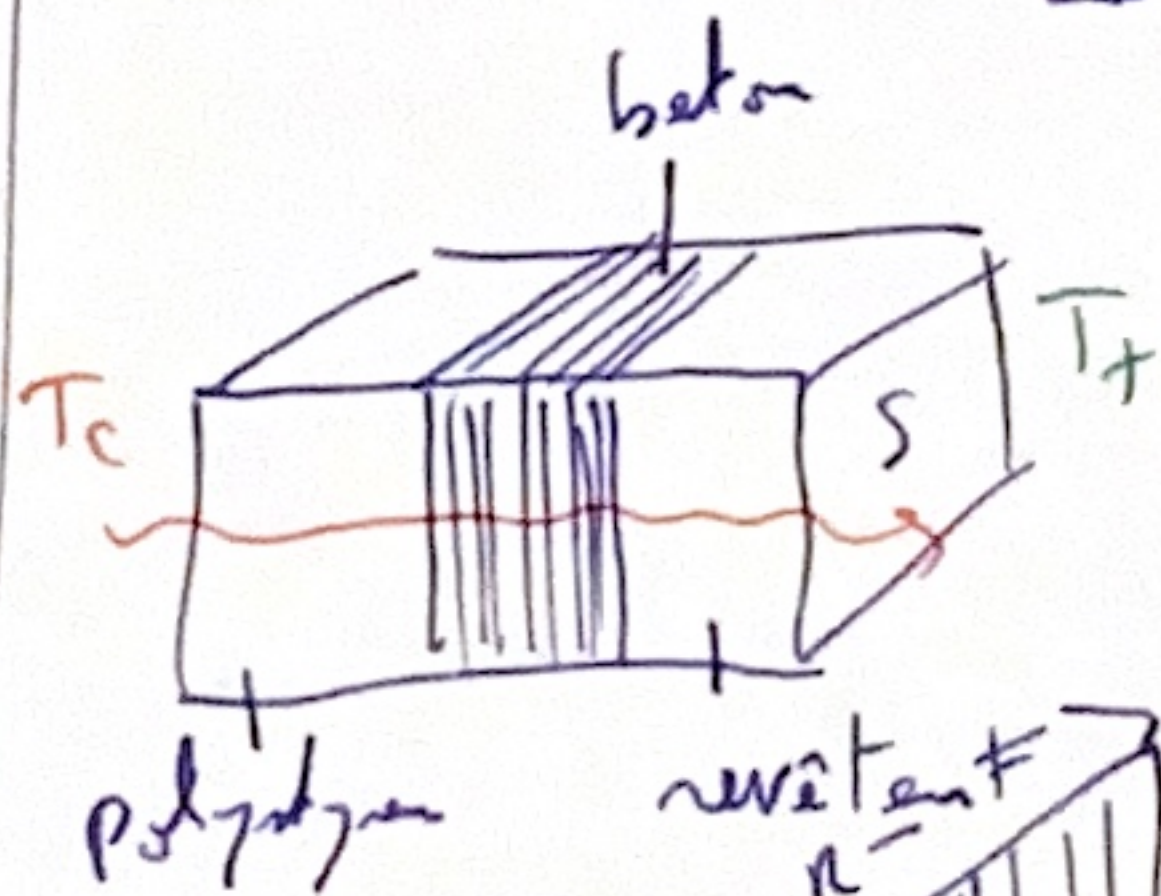
$$\Delta T = \frac{\phi_{th}}{\lambda S} L$$

Re: Rth ne dépend pas de p et c
Es inactive thermique

Finalement:

$$\Delta T = \frac{L}{\lambda S} \phi_{th}$$

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda S} \leftrightarrow R_{dec} = \frac{L}{\lambda S}$$



$$R_{th} = R_p + R_b + R_r$$

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3 = \phi(R_1 + R_2 + R_3) = \phi R_{eq}$$

idée:



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \dots$$

$$\phi = \phi_1 = \phi_2 = \dots = \frac{\Delta T}{R_1} = \dots = \frac{\Delta T}{R_n} = \Delta T \left[\frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n} \right]$$

chaud et froid

III 2 Diffusion Convective - Conductive: loi de Newton. $\vec{S}Q = h[T_{int} - T_{ext}]S dt$
 $\Rightarrow$ Modélisation de l'interface solide-fluide.

* Soit T_s et T_f les Températures fixées dans le solide et l'air en Régime R.P
 Permanent

on veut le flux surfacique instant: $\vec{j} = -\lambda_f \vec{\nabla}(T)$ $\Delta T = 0$ *

ici $\vec{\nabla} T = \frac{T(a) - T(0)}{a} \vec{e}_x = -\frac{T_s - T_f}{a} \vec{e}_x$ soit $\vec{j} = +\lambda_f \frac{T_s - T_f}{a} \vec{e}_x$



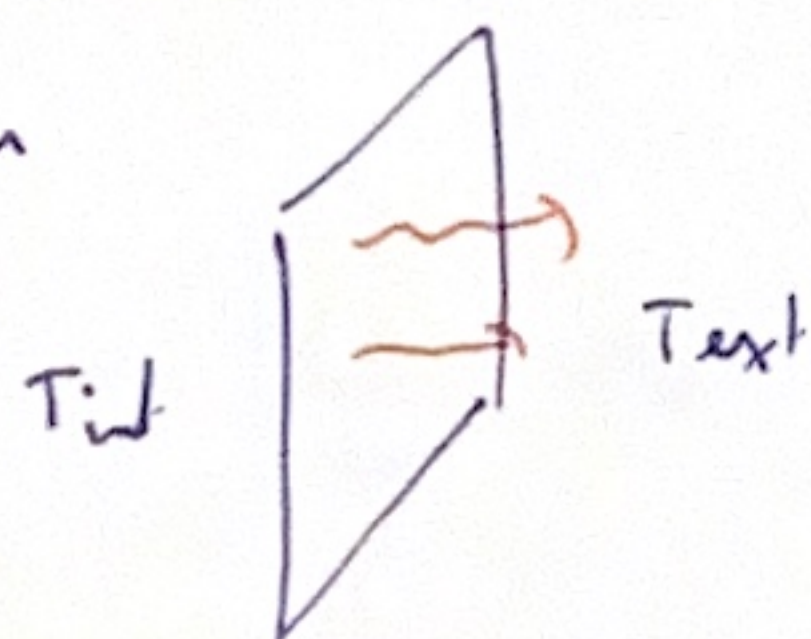
on pose $h \equiv \frac{\lambda_f}{a}$ le coefficient de Newton
 ($W m^{-2} K^{-1}$)

λ_f : conductivité de la fluide extérieur.
 a : épaisseur de la couche limite.

* $T(x) = T_s + \frac{T_f - T_s}{a} \cdot x$

$\vec{j} = h(T_s - T_f) \vec{e}_x$

ex: mur



$\phi_p = j \cdot S = h S (T_{int} - T_{ext}) > 0$
 $\Rightarrow$ flux thermique perdu

Application:

Refroidissement d'une maison:



$dU = C_n dT = -\frac{S Q}{dt} = -\phi_p dt = -h S (T - T_{ext}) dt$

on doit apporter des pertes
 par refroidissement et un apport
 par chauffage.

Soit $\frac{dT}{dt} + \frac{h S}{C_n} T = \frac{h S}{C_n} T_{ext}$

$\begin{cases} T(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}} \\ T(t) = T_{ext} \end{cases}$

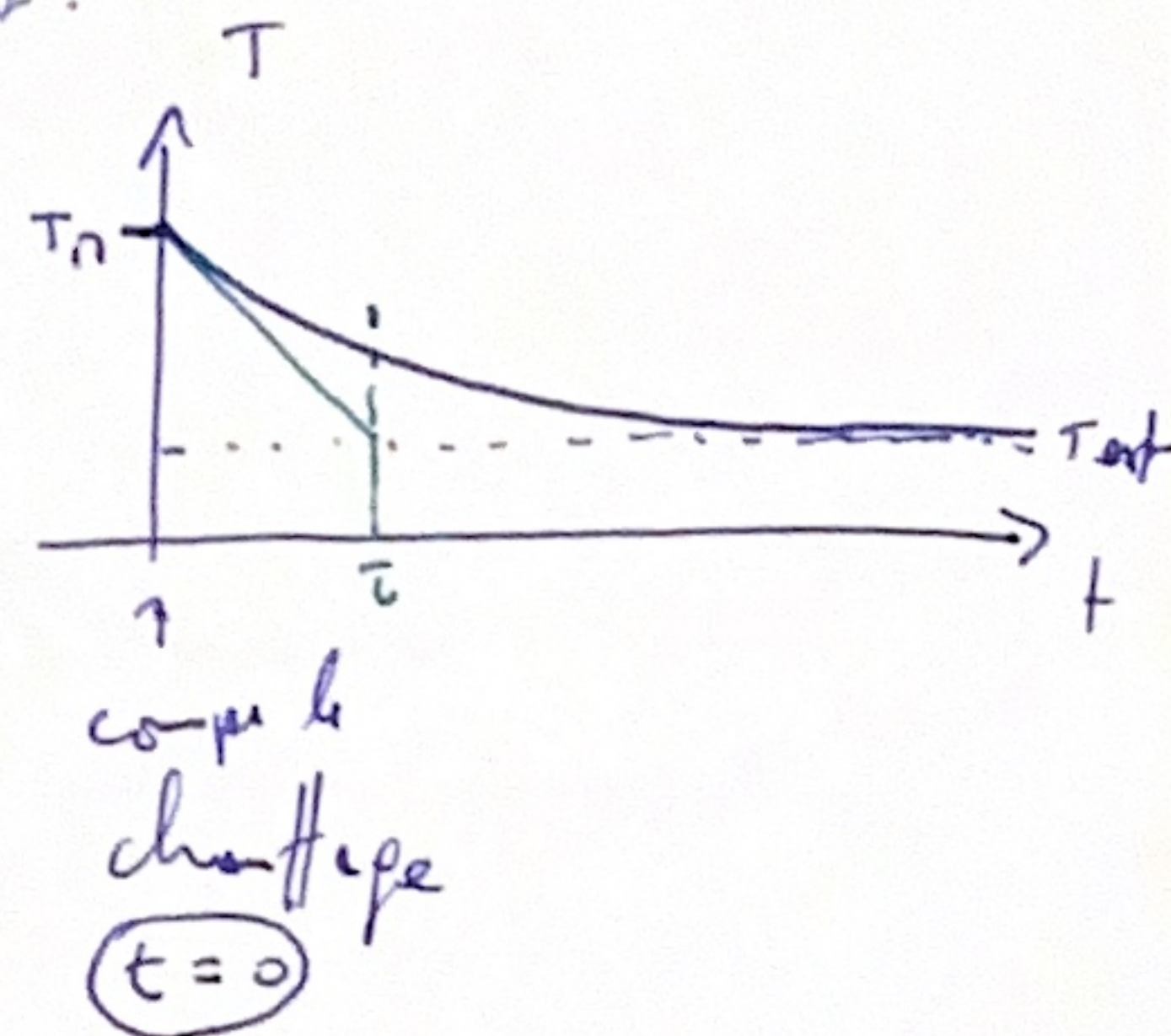
$\tau \equiv \frac{C_n}{h S}$

$T(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}} + T_{ext}$

$T(0) = T_n$

$T(0) = T_n = K \cdot 1 + T_{ext} \Rightarrow K = T_n - T_{ext}$

$T(t) = (T_n - T_{ext}) e^{-\frac{t}{\tau}} + T_{ext}$



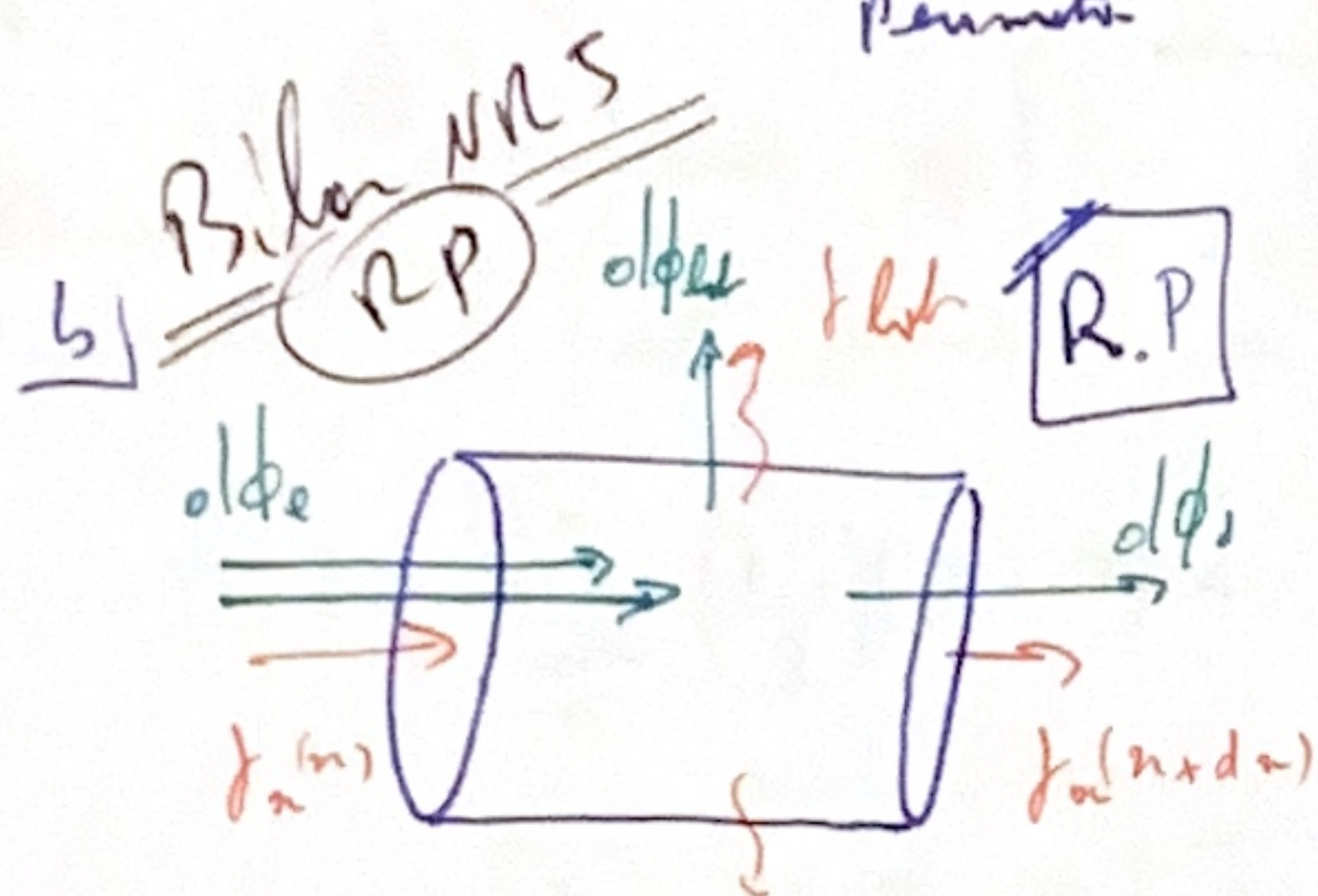
3) Ailette de refroidissement



$$f_{\text{lat}} = \lambda_{\text{air}} \frac{T(x) - T_f}{a} > 0 \quad f_{\text{lat}} = h(T(x) - T_f)$$

$$d\phi_{\text{lat}} = f_{\text{lat}} \cdot dS_{\text{lat}} = f_{\text{lat}} \cdot P dx$$

$$dQ = h(T(x) - T_f) P dx \quad (\text{chaleur évacuée})$$



$$d\phi_{\text{entree}} = f_n(x) S - f_n(x+dx) S - h(T(x) - T_f) P dx$$

en Régime Permanent (R.P): $d\phi_{\text{entree}} = 0$.

$$\text{Soit } - \frac{\partial f_x}{\partial x} S - h(T(x) - T_f) P dx = 0$$

Diminution f_x pertes lat.

$$\vec{f}_x = -\lambda \vec{\nabla} T \quad f_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\text{Donc } \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} S - h P T(x) = -h P T_f$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \left(\frac{h P}{\lambda S} \right) T = - \frac{h P}{\lambda S} T_f$$

poly. conc.

$$\text{SH: } T'' - \frac{1}{\delta^2} T = 0 \quad T(x) = K e^{\pm x/\delta} \Rightarrow \delta^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0 \Rightarrow \delta = \pm \frac{1}{\delta}$$

$$T(x) = A e^{-\frac{x}{\delta}} + B e^{+\frac{x}{\delta}} \quad \text{Hyp } L \gg \delta$$

$$\text{SP: } T = T_f$$

Solut^o:
SG = SH + SP

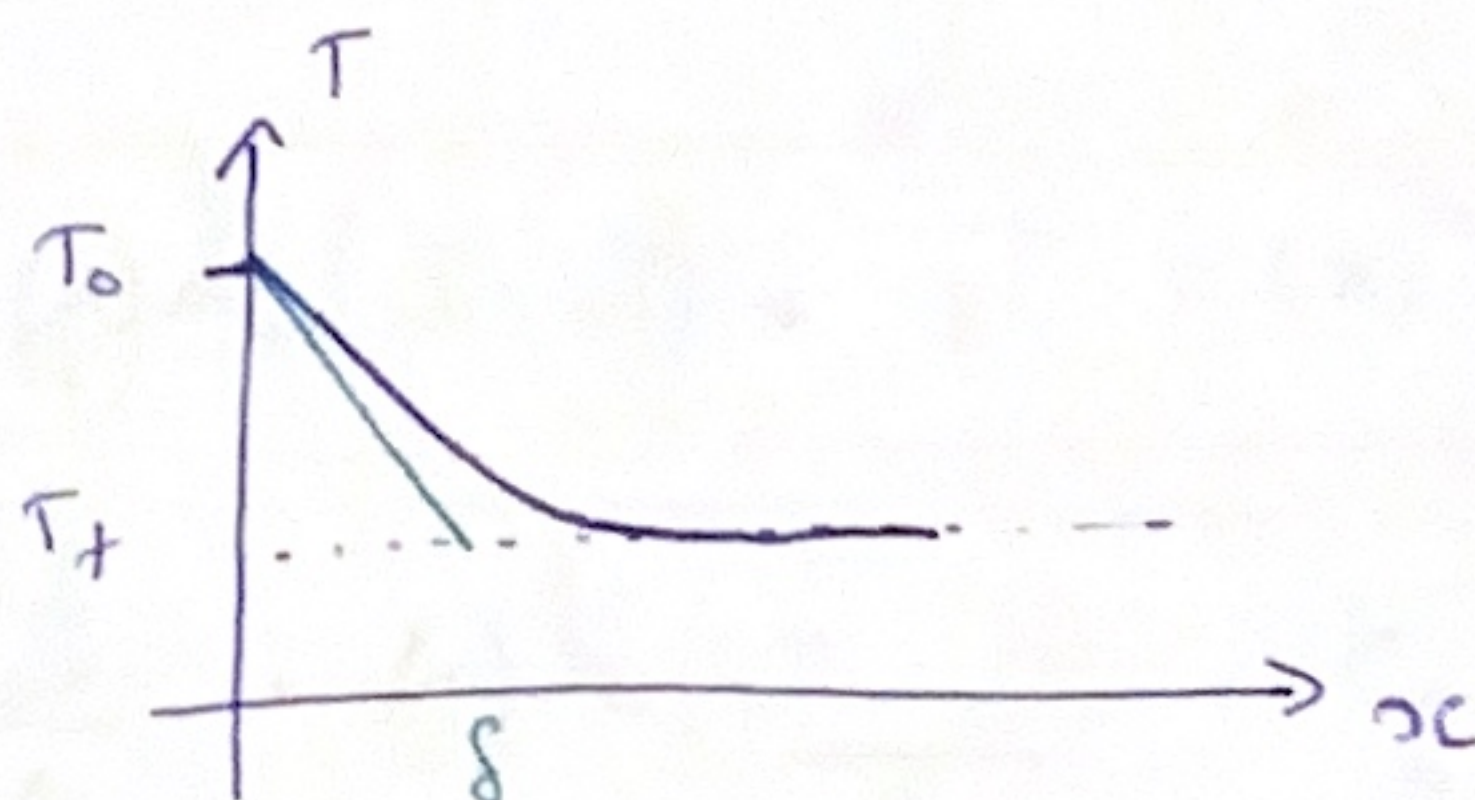
$$T(x) = T_f + A e^{-\frac{x}{\delta}}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\lambda S}{h P}}$$

$$T(0) = T_0 = T_f + A e^{-\frac{0}{\delta}}$$

$$A = T_0 - T_f$$

$$T(x) = T_f + (T_0 - T_f) e^{-\frac{x}{\delta}}$$



c) $\phi_{\text{tot}} = \int_0^\infty d\phi_{\text{tot}} = \int_0^\infty h(T_m - T_f) P dn = \int_0^\infty h P [T_0 - T_f] e^{-\frac{n}{\delta}} dn$
 Calcul Neuf $\delta = \sqrt{\frac{\lambda S}{hP}}$

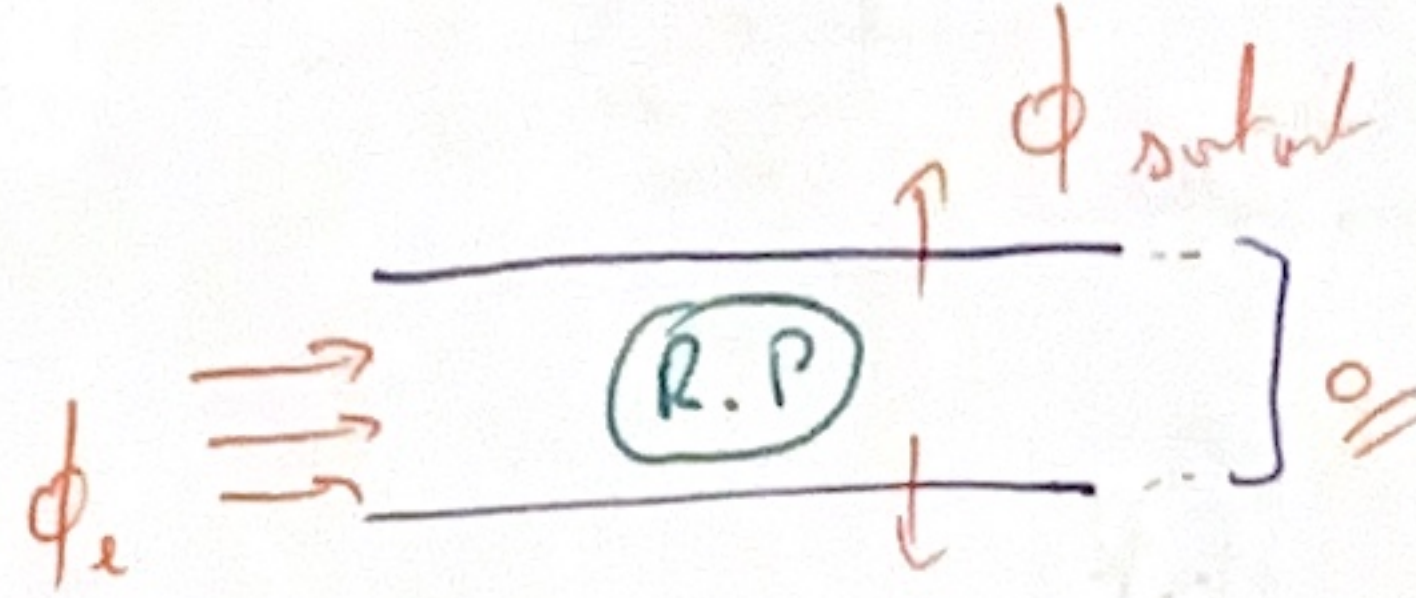
$$= h P [T_0 - T_f] \left[-\delta e^{-\frac{n}{\delta}} \right]_0^\infty = h P \delta (T_0 - T_f) = h P \sqrt{\frac{\lambda S}{hP}} (T_0 - T_f)$$

$\phi_{\text{tot}} = \sqrt{\lambda h S P} (T_0 - T_f)$ (valeur) $[2 \frac{\lambda h S P}{\delta}]^{\frac{1}{2}} = [2] L$

Calcul Explicit

Autre approche:

RR $\Rightarrow$



$\text{Div}(\vec{q}) = 0$

flux conservé

$$\phi_{\text{tot}}^{\text{sout}} = \phi_e(n=0) = \vec{q}(0) \cdot \vec{S} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}(0) \cdot S = -\lambda (T_0 - T_f) \left(-\frac{1}{\delta}\right) e^{-\frac{0}{\delta}} \times S$$

$$= +\lambda \sqrt{\frac{hP}{\lambda S}} S [T_0 - T_f] \quad \phi_{\text{tot}} = \sqrt{\lambda h S P} [T_0 - T_f] \quad (\checkmark)$$

d) Situation plus générale:

Soit ϕ_0 le flux à l'entrée.

$L \gg \delta$

CI $\phi_0 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}(0) \cdot S$ $\frac{\partial T}{\partial n}(0) = -\frac{\phi_0}{\lambda S}$ et $T(0) = T_0$

2 états déterminer.

$$T(n) = T_f + A e^{-\frac{n}{\delta}} + B e^{+\frac{n}{\delta}} \Rightarrow T_0 = T_f + A + B$$

$$\frac{\partial T}{\partial n}(n) = -\frac{A}{\delta} e^{-\frac{n}{\delta}} + \frac{B}{\delta} e^{+\frac{n}{\delta}} \Rightarrow -\frac{\phi_0}{\lambda S} = \frac{B-A}{\delta}$$

$$\begin{cases} A+B = T_0 - T_f \\ A-B = \frac{\phi_0 \delta}{\lambda S} \end{cases}$$

$$A = \frac{T_0 - T_f}{2} + \frac{\phi_0 \delta}{2 \lambda S}$$

$$B = \frac{T_0 - T_f}{2} - \frac{\phi_0 \delta}{2 \lambda S}$$

$$\text{ch}(n) = \frac{e^{+n} + e^{-n}}{2}$$

$$\text{sh}(n) = \frac{e^{+n} - e^{-n}}{2}$$

$$T(x) = T_f + (T_0 - T_f) \text{ch}\left(\frac{n}{\delta}\right) - \frac{\phi_0 \delta}{\lambda S} \text{sh}\left(\frac{n}{\delta}\right) \rightarrow T(0) = T_0 \quad (\checkmark)$$

$$\frac{dT(n)}{dn} = \frac{(T_0 - T_f)}{\delta} \text{sh}\left(\frac{n}{\delta}\right) - \frac{\phi_0}{\lambda S} \text{ch}\left(\frac{n}{\delta}\right) \rightarrow \frac{dT}{dn}(0) = -\frac{\phi_0 \delta}{\lambda S} \quad (\checkmark)$$

$$T(L) = T_f + \left(\frac{T_0 - T_f}{\delta}\right) \text{ch}\left(\frac{L}{\delta}\right) - \frac{\phi_0}{\lambda S} \text{sh}\left(\frac{L}{\delta}\right) \quad \text{Si } L \gg \delta$$

Complément Xillette

Xillette de taille finie.

By Contrairement à la pintade il n'y a qu'une "l" à xillette car il faut deux ailes pour voler.

F. Lanot

(philosophe à LVH)

Situation plus générale:

Soit ϕ_0 le flux à évacuer.

$L \gg \delta$

CI $\phi_0 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0, S)$

$\frac{\partial T}{\partial n}(0) = -\frac{\phi_0}{\lambda S}$ (h)

et $T(0) = T_0$

à déterminer.

$T(x) = T_f + A e^{-\frac{x}{\delta}} + B e^{+\frac{x}{\delta}}$

$\Rightarrow T_0 = T_f + A + B$

$\frac{\partial T}{\partial n}(x) = -\frac{A}{\delta} e^{-\frac{x}{\delta}} + \frac{B}{\delta} e^{+\frac{x}{\delta}}$

$\Rightarrow -\frac{\phi_0}{\lambda S} = \frac{B-A}{\delta}$

$$\begin{cases} A+B = T_0 - T_f \\ A-B = \frac{\phi_0 \delta}{\lambda S} \end{cases}$$

$A = \frac{T_0 - T_f}{2} + \frac{\phi_0 \delta}{2\lambda S}$

$B = \frac{T_0 - T_f}{2} - \frac{\phi_0 \delta}{2\lambda S}$

$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$T(x) = T_f + (T_0 - T_f) ch\left(\frac{x}{\delta}\right) - \frac{\phi_0 \delta}{\lambda S} sh\left(\frac{x}{\delta}\right) \rightarrow T(0) = T_0 (\checkmark)$

$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{(T_0 - T_f)}{\delta} sh\left(\frac{x}{\delta}\right) - \frac{\phi_0}{\lambda S} ch\left(\frac{x}{\delta}\right)$

$\rightarrow \frac{dT}{dx}(0) = -\frac{\phi_0 \delta}{\lambda S} (\checkmark)$

$T(L) = T_f + (T_0 - T_f) ch\left(\frac{L}{\delta}\right) - \frac{\phi_0 \delta}{\lambda S} sh\left(\frac{L}{\delta}\right) \quad \text{Si } L \gg \delta$

Que se passe-t-il en L ?

Retour sur $L \gg \delta$ $\rightarrow$ échelle typique de diffusion.

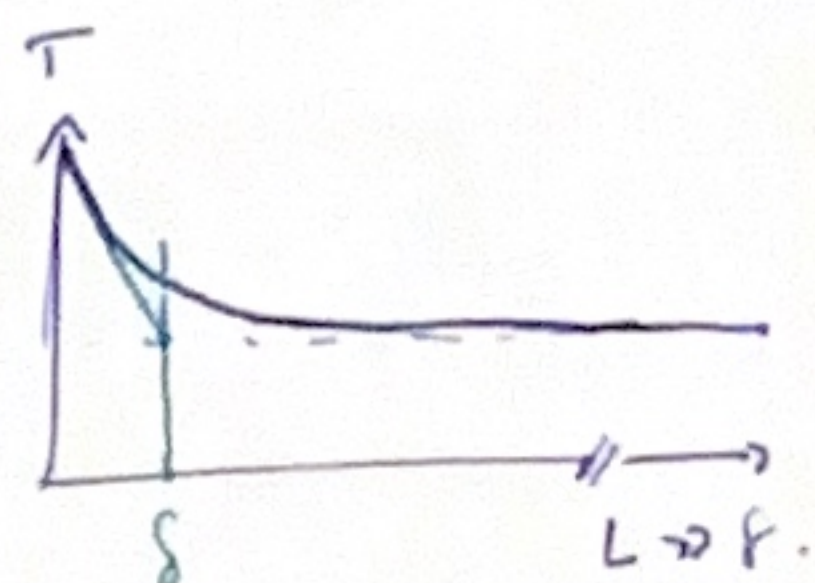
$$T(L) = T_f + A e^{-\frac{L}{\delta}} + B e^{+\frac{L}{\delta}}$$

$$\frac{dT}{dx}(L) = -\frac{A}{\delta} e^{-\frac{L}{\delta}} + \frac{B}{\delta} e^{+\frac{L}{\delta}}$$

2 cas prévisibles:

$$* T(L) = T_f + \left(\frac{T_0 - T_f}{2} - \frac{\phi_0 \delta}{2\lambda S} \right) e^{+\frac{L}{\delta}} \approx T_f$$

$$* \frac{dT}{dx}(L) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{T_0 - T_f}{2} - \frac{\phi_0 \delta}{2\lambda S} \right) e^{+\frac{L}{\delta}} \rightarrow 0$$



$\rightarrow$ pas de flux $[q_x]$ au bout de l'ailette.

On doit avoir: $\frac{\phi_0 \delta}{\lambda S} = \frac{T_0 - T_f}{2}$ $\phi_0 = \frac{\lambda S}{\delta} (T_0 - T_f) = \lambda S \sqrt{\frac{hP}{\lambda S}} (T_0 - T_f)$

Soit $\phi_0 = \sqrt{\lambda h S P} (T_0 - T_f)$

il faut que le flux en entrée soit évacué latéralement.

* Présentation du TP d'intégr sur l'ailette.

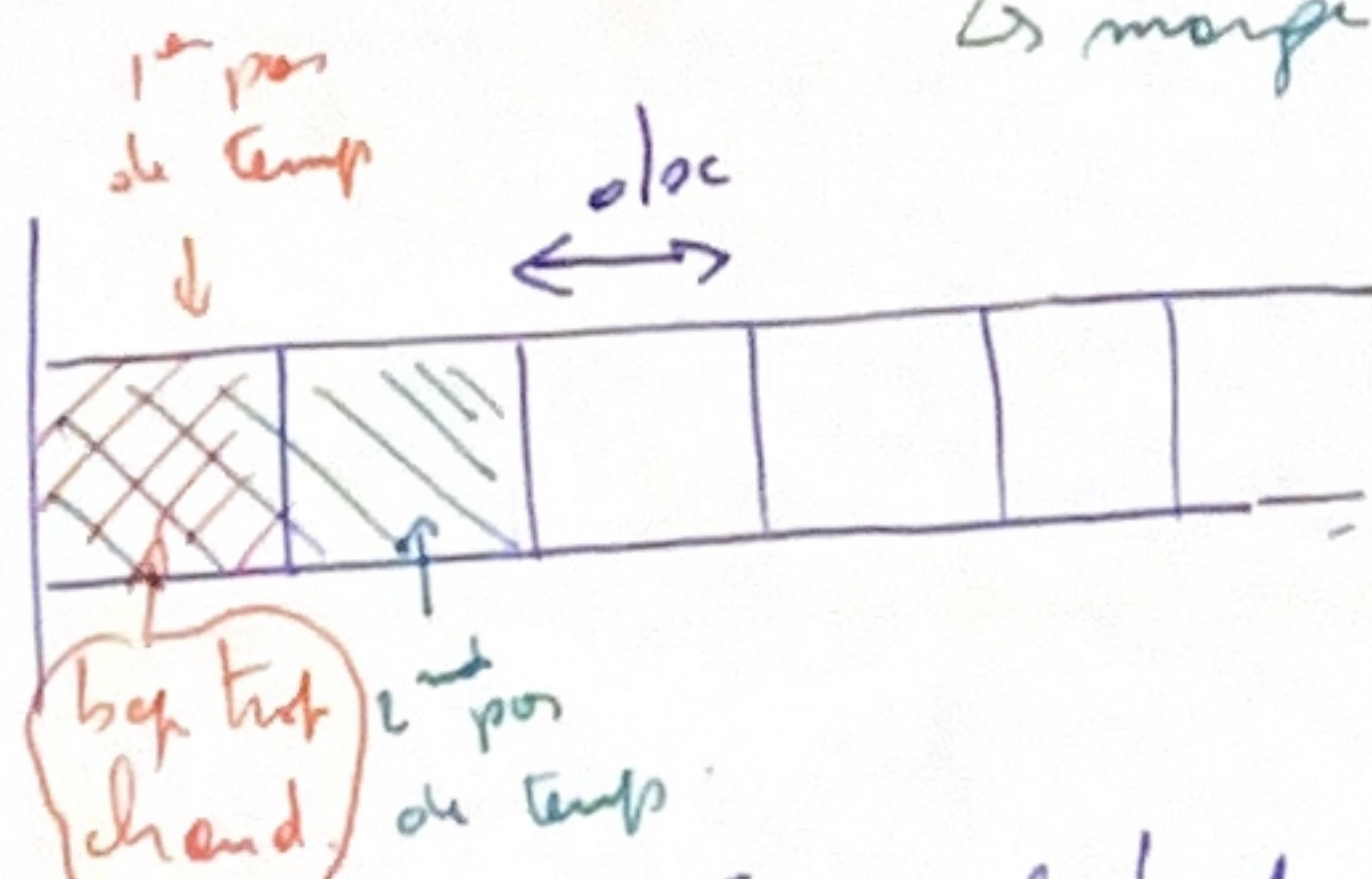
Approche Numérique:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T \stackrel{1D}{=} \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

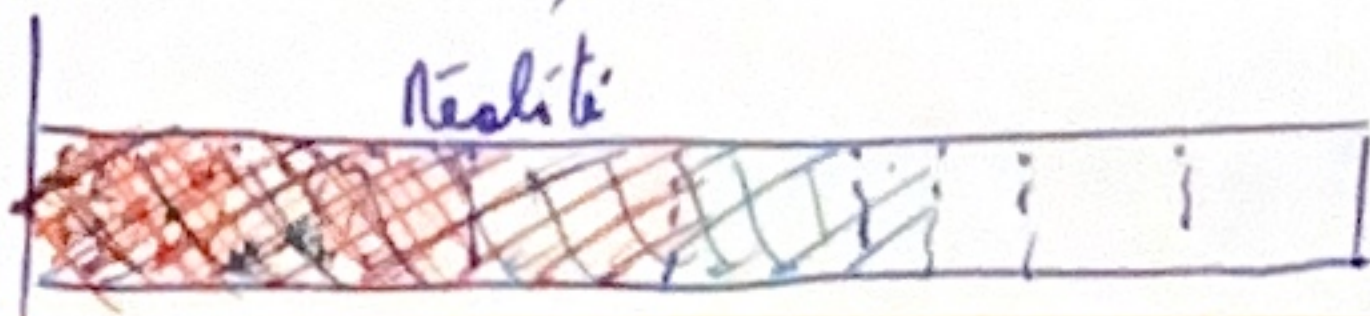
Typiquement sur une durée d'intégration numérique $\Delta t \sim \Delta x^2 \frac{\rho c}{\lambda}$

Soit $\Delta x = \frac{L}{N}$

On choisit $\Delta t < \frac{\rho c}{2\lambda} \Delta x^2$ pour que la méthode d'Euler Converge $\rightarrow$ marge de sécurité.



Soit $\delta = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c} \Delta t}$: il faut $\delta < \Delta x$

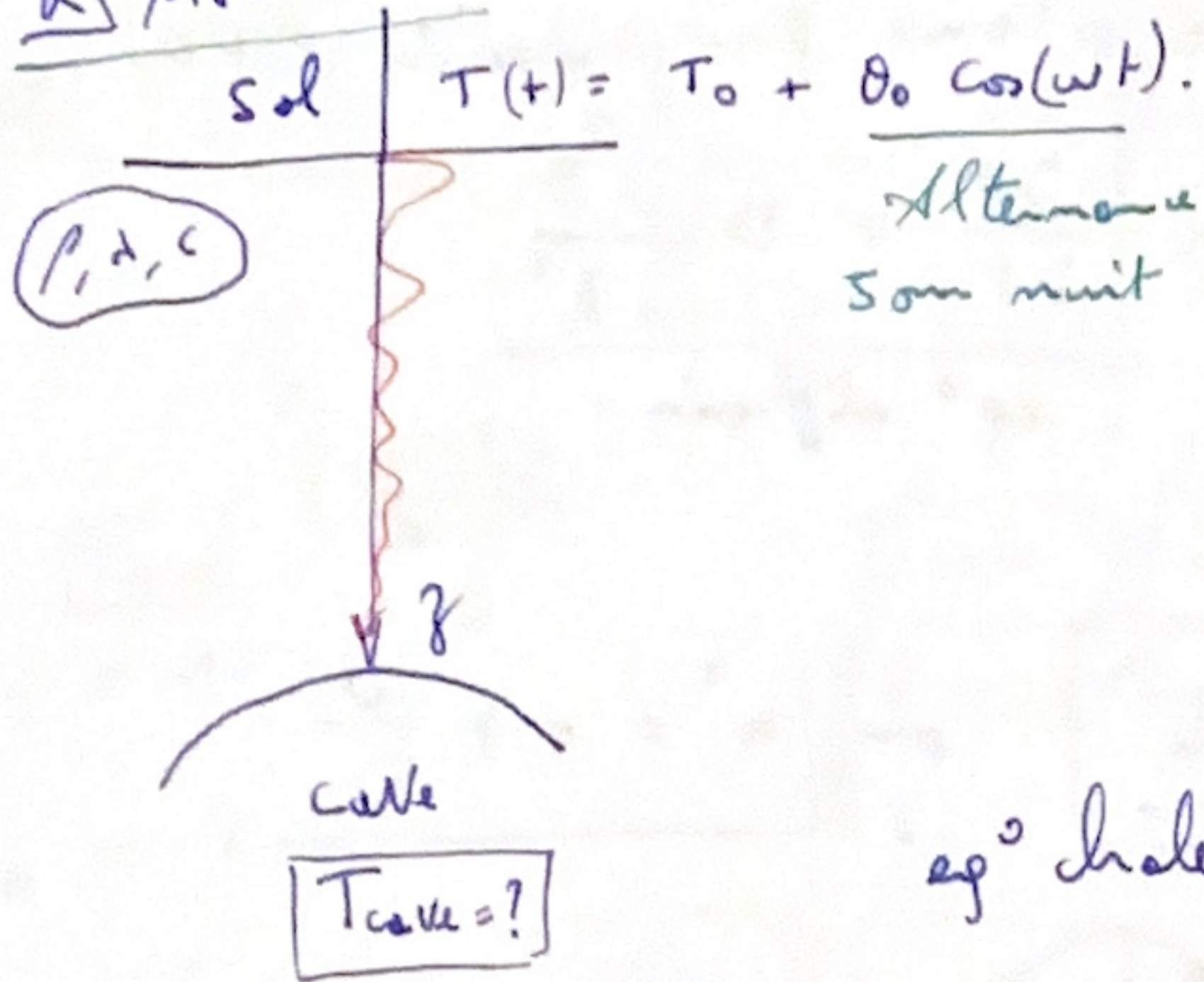


Si non la chaleur devrait parcourir plus δ numérique mais sera placée dans 1 seule δ

$\Rightarrow$ Température surévaluée $\rightarrow$ Euler Diverge.

4) Onde thermique : Effet de cave.

A) Modélisation



$$\theta(t) = T(t) - T_0 = \theta_0 \cos(\omega t)$$

Phénomène T-périodique car $T = 1 \text{ jour}$
 $T = 1 \text{ an}$
 etc...

Principe de D'Alembert:

$$\theta(z, t) = a(z) \cos(\omega t) \quad \text{Rq: } t=0 \text{ origine des temps}$$

eq° chaleur : $\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$
 eq° linéaire

B) Linéaire $\Rightarrow$ on peut poser en CI : $\theta(z, t) = a(z) e^{j\omega t}$

Soit $\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$ puis donne $\frac{\rho c}{\lambda} j\omega a(z) e^{j\omega t} = a''(z) e^{j\omega t}$

$$a''(z) - j \frac{\omega \rho c}{\lambda} a(z) = 0$$

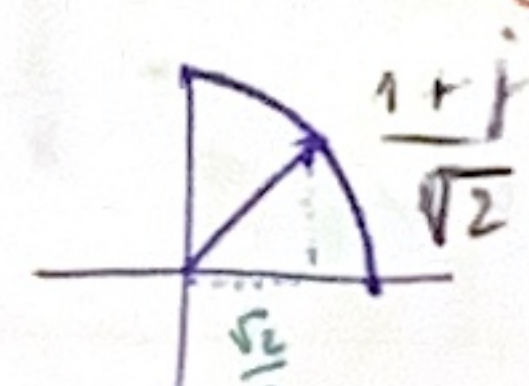
Résultat $\rightarrow$ Polynôme caractéristique

$$a(z) = e^{nz} \rightarrow n^2 - j \frac{\omega \rho c}{\lambda} = 0$$

2 sol°

$$\left[\pm \frac{(1+j)}{\sqrt{2}} \right]^2 = j$$

$$n = \pm \sqrt{\frac{j\omega\rho c}{\lambda}} \cdot \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$



on obtient $a(z) = A e^{+\frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{j\omega\rho c}{\lambda}} z} + B e^{-\frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{j\omega\rho c}{\lambda}} z}$ on pose $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\omega\rho c}}$

$$a(z) = B e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j \frac{z}{\delta}}$$

$$\text{Rq } [\delta] = L^{-1}$$

Finalement

$$\theta(z, t) = K e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{z}{\delta})}$$

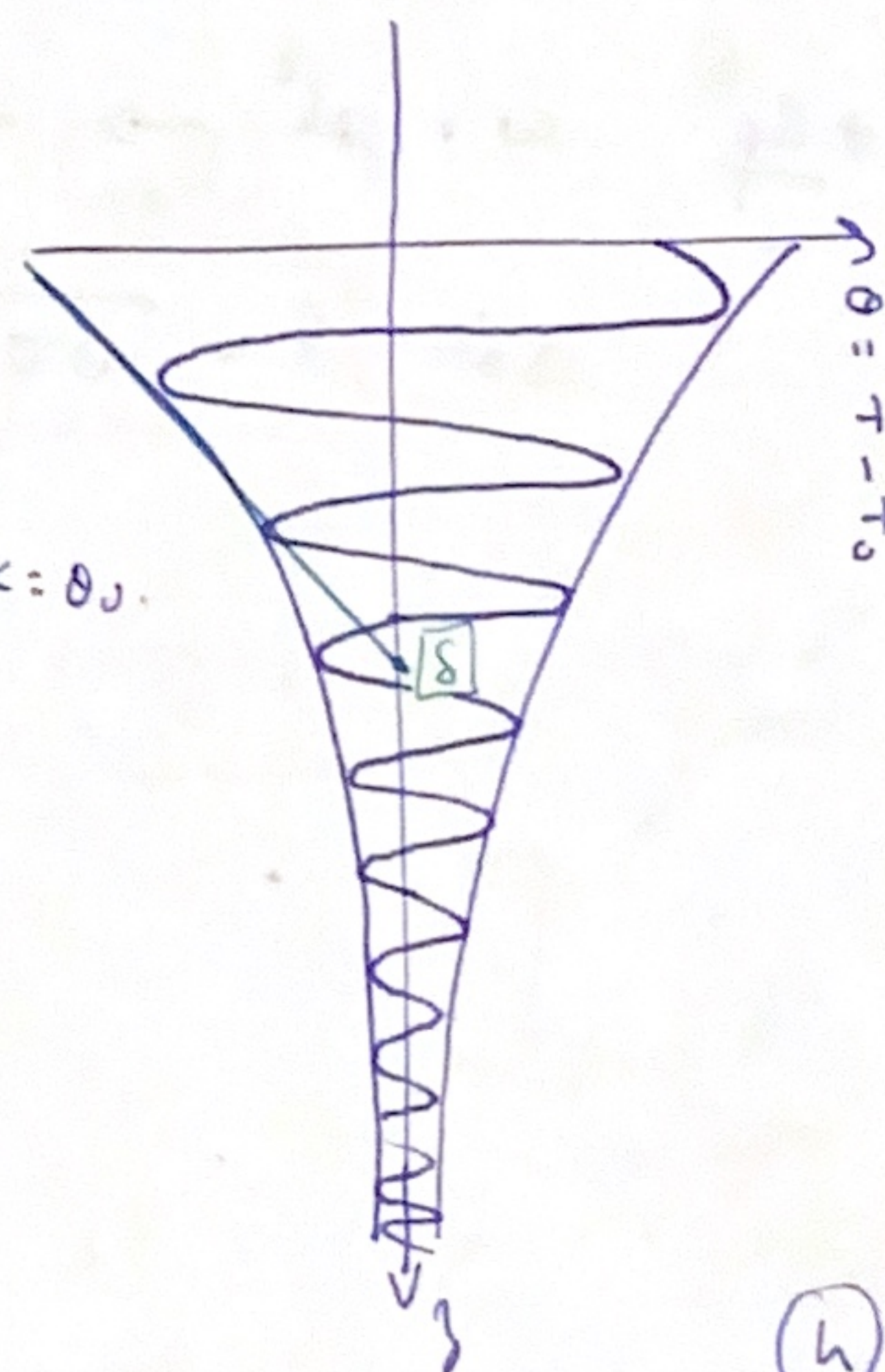
$$\theta(z, t) = K e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$$

CI $\theta(0, t) = \theta_0 \cos(\omega t) = K \cdot 1 \cdot \cos(\omega t - 0) \Rightarrow K = \theta_0$

$$T(z, t) = T_0 + \theta_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$$

Si $z \gg \delta \quad e^{-\frac{z}{\delta}} \rightarrow 0 \quad T \sim T_0$

cave } $T_{\text{fond}} = T_0 \rightarrow T$ moyenne Annuelle.
 Grotte }



(δ Relat° de Dispersion) (Autre approche).

On l'obtient en injectant une onde plane progressive (OPP) dans l'eq° d'onde:

$$e^{j(\omega t - kz)} \xrightarrow{\text{OPP}} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]$$

$$j\omega e^{j(\omega t - kz)} = D (-jk)^2 e^{j(\omega t - kz)} \quad \text{eq° différent.$$

$$\text{Soit } j\omega = -Dk^2$$

$$\boxed{\omega = +jDk^2}$$

$$\text{ou } k^2 = -j \frac{\omega}{D}$$

$$k = \pm \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{D}}$$

$$k = \pm (1-j) \sqrt{\frac{\rho c \omega}{2\lambda}} = \pm \frac{1-j}{\delta}$$



$$\sqrt{-j} = \pm \frac{1-j}{\sqrt{2}}$$

existe
Pas !!!

$\delta \rightarrow \infty$

PB de sens de prop.

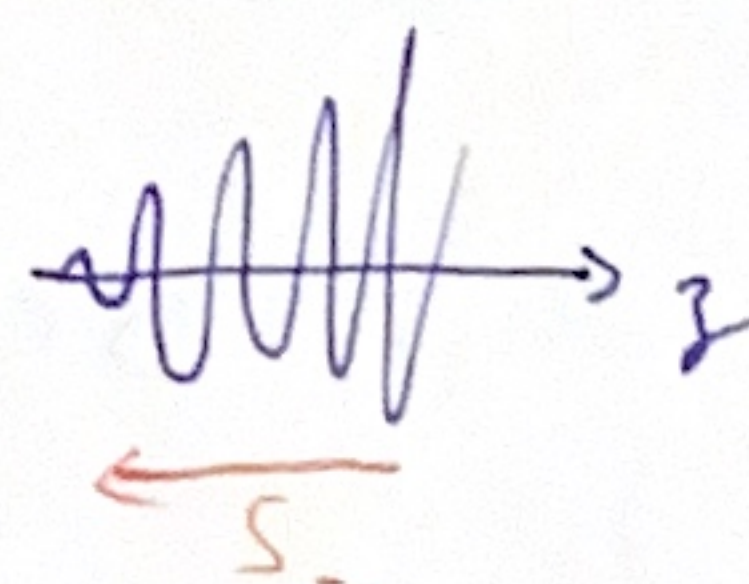
$$\text{Soit } \theta(t,z) = \theta_0 e^{j(\omega t \pm \frac{1-j}{\delta} z)} = \theta_0 e^{\pm \frac{z}{\delta}} e^{j(\omega t \mp \frac{z}{\delta})}$$

$$\theta(t,z) = \theta_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{z}{\delta})}$$

$$\xrightarrow{\text{IR}} \theta(t,z) = \theta_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$$

* Re⁽¹⁾: Relat° de Disp et locale $\Rightarrow$ 2 sol° cohérentes :

$$\xrightarrow{S_+} z \quad (\checkmark)$$



(x) Ne convient pas à notre problème

* Re⁽²⁾: $\omega = \rho k^2 \rightarrow \frac{2\pi}{T} \sim D \frac{(2\pi)^2}{\delta^2}$

$$\text{Soit } \boxed{\delta \sim \sqrt{D\tau}}$$

SODG: $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\omega \rho c}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi \rho c} \cdot T} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\rho c} T}$ on retrouve $\delta \sim \sqrt{D \tau}$
avec τ la période.

ex Cave:



$T = 86400 \text{ s}$

$\lambda_{\text{Terre}} \sim 0,4 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
 $c_{\text{Terre}} \sim 1,5 \cdot 10^3 \text{ J K}^{-1} / \text{kg}$
 $\rho_{\text{Terre}} \sim 1,3 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

$\lambda_{\text{pien}} \sim 0,82 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
 $c_{\text{pien}} \sim 800 \text{ J K}^{-1} / \text{kg}$
 $\rho_{\text{pien}} \sim 2 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

$\delta_S \sim 10 \text{ cm}$
 $\delta_A \sim 2 \text{ m}$

$\delta_S \sim 12 \text{ cm}$
 $\delta_A \sim 2,5 \text{ m}$

$\tilde{D}_{\text{Terre}} = \frac{\lambda}{\pi \rho c} = 1,22 \cdot 10^{-7} \text{ SI}$

$\tilde{D}_{\text{pien}} = 1,8 \cdot 10^{-7} \text{ SI}$

$\epsilon \sim 6 \cdot 10^{-3} < 1\%$

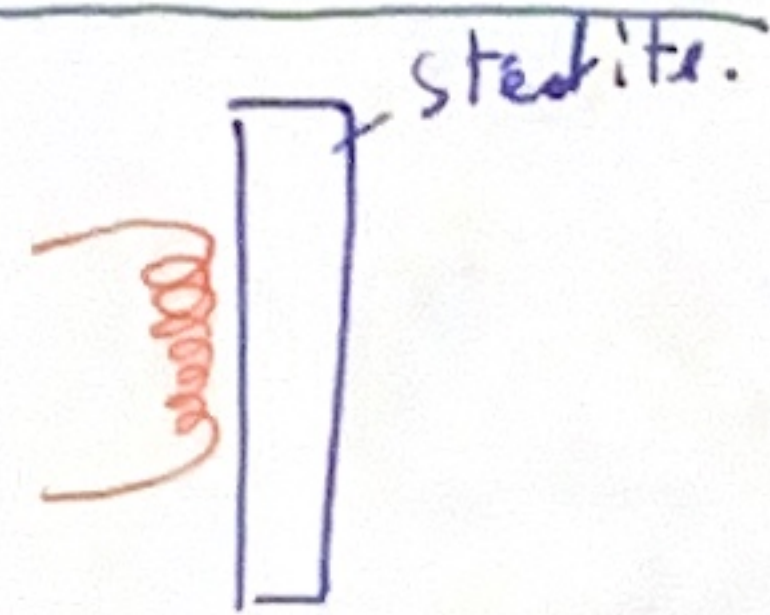
Soit $\delta_A \sim 10-12 \text{ m} \Rightarrow$ plus de variat° de température

Rp: Compteur d'eau.
 $\sim 50 \text{ cm}$
 $\sim 5 \text{ s}$

$\tau_f \sim \frac{\delta_c^2}{\tilde{D}_{\text{Terre}}} = 235$

ex Radiateur:

en chauffe par cycle



$\delta_m = 6 \text{ mm}$
 $\delta_H = 5 \text{ cm}$
 $\delta_J = 25 \text{ cm}$
 $T \times 1440 \sim 40^\circ \text{C}$
 $\delta_S = 40,8 \text{ mm}$

$\lambda_{\text{Ste}} = 6,6 \text{ SI}$
 $\rho_{\text{Ste}} = 3 \cdot 10^3 \text{ SI}$
 $c_{\text{Ste}} = 1 \cdot 10^3 \text{ J K}^{-1} / \text{kg}$

$\tilde{D}_{\text{Ste}} = \frac{\lambda}{\pi \rho c} = 6,8 \cdot 10^{-7} \text{ SI}$

Rp: on a pas $\delta \ll L$...

Table d'Analogies

Electrostatique (RP)

$\text{Div}(\vec{j}) = 0$

V

T

U

ΔT

$\vec{f} = \gamma \vec{E}$

$\vec{f} = -\gamma \nabla V$

$\vec{f}_p = -\lambda \nabla T$

$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$ (Ampère)

$\phi_{th} = \iint \vec{j}_p \cdot d\vec{S}$ (watt)

$U = RI$

$\Delta T = R_{th} \phi$

$R = \frac{L}{\gamma S}$

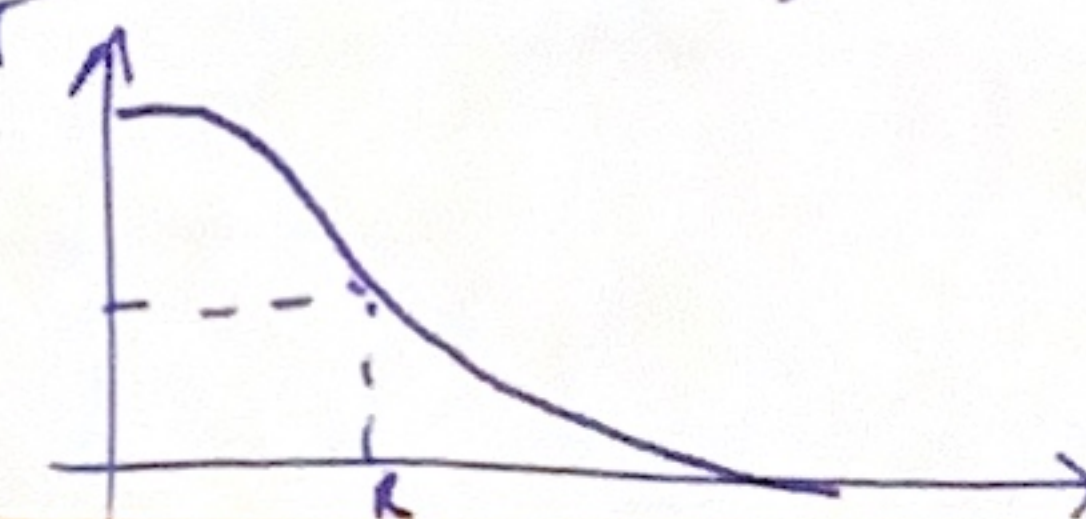
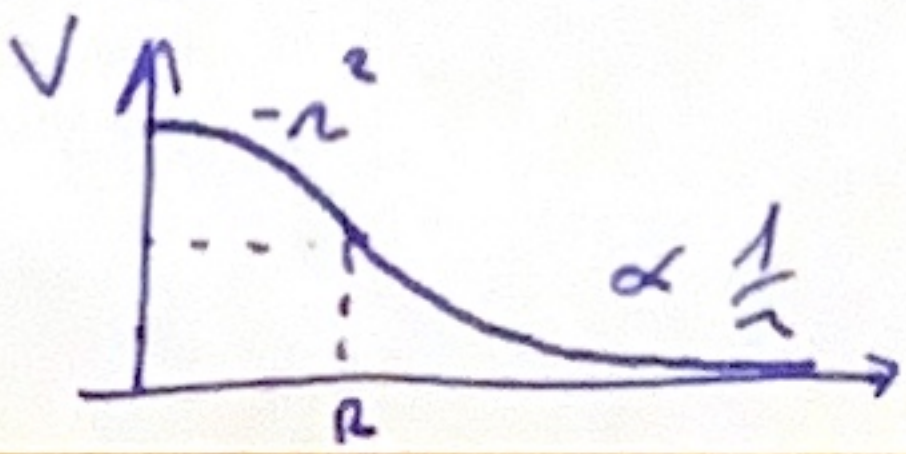
$R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$

2 loi d'Ohm

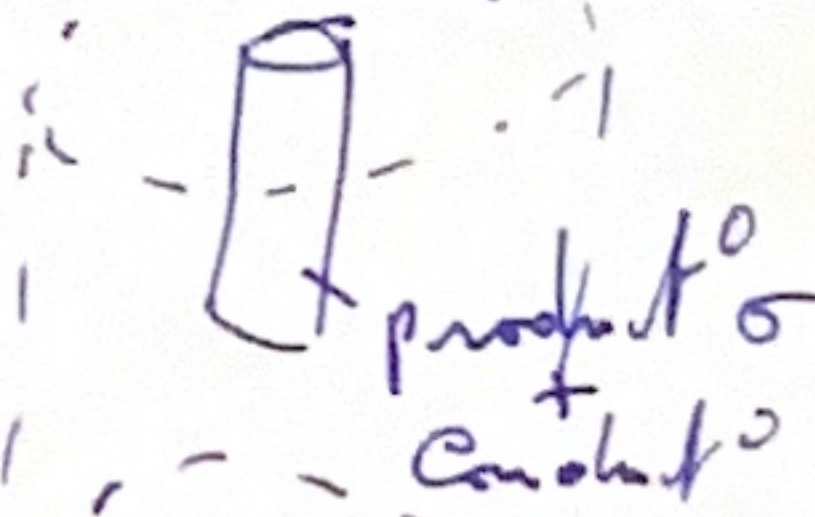
$\text{Div}(\vec{j}_q) = \sigma$



$\vec{j} = \gamma \vec{E}$



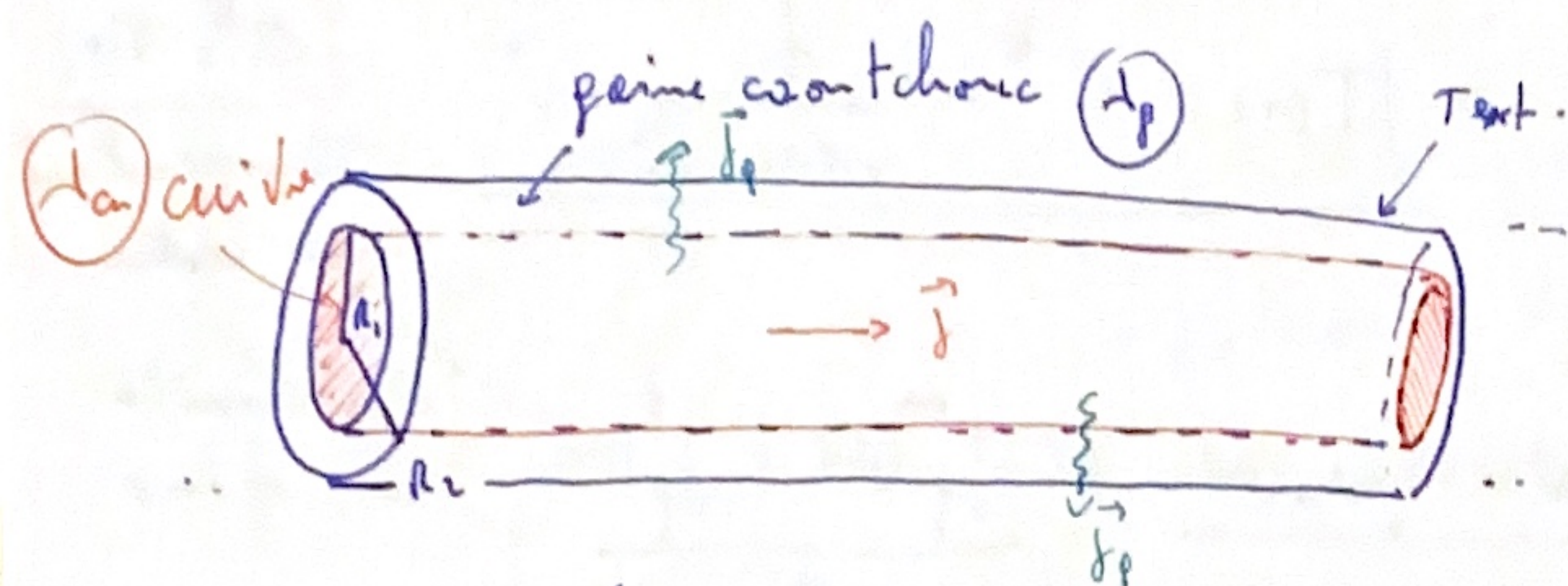
pour aller + loin.



(C)

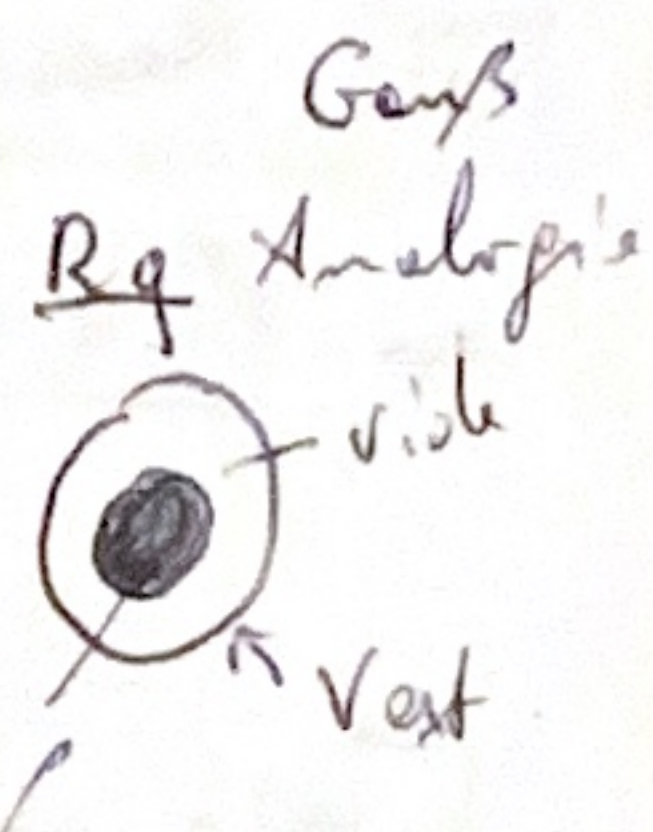
(S)

Appliqué : ⑥ Dissipation dans un câble électrique :



$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \pi R_1^2$$

$$R = \frac{L}{\gamma S}$$



(i) Résistance du câble $R = \frac{L}{\gamma S}$

(ii) Puissance Totale dissipée dans la cuivre :

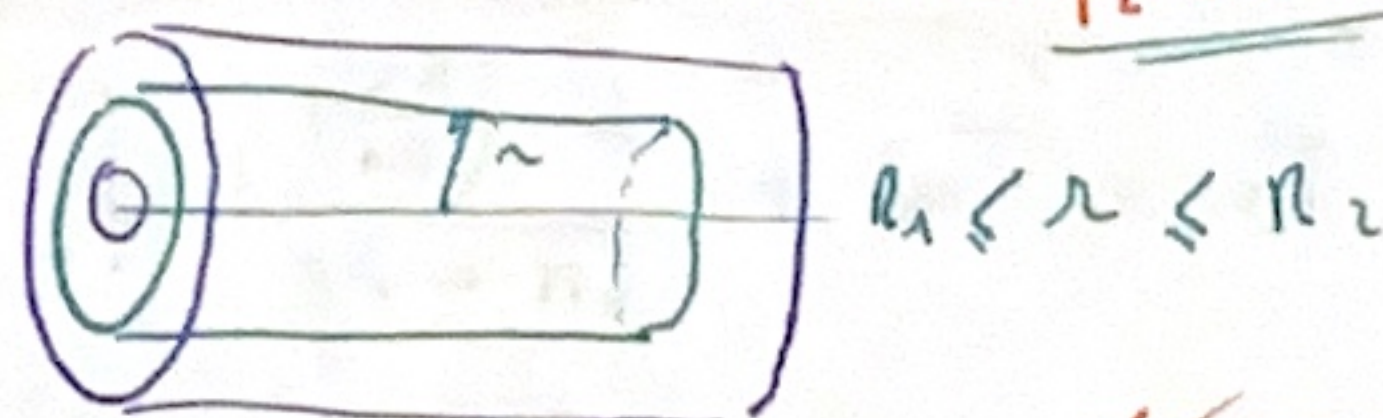
$$P = R I^2 = \frac{L I^2}{\gamma S} = \Phi_2$$

flux thermique total de la gaine

$R_1 < r < R_2$

$$\Phi_2 = \iint_{\Sigma_{\text{lat}}} \vec{j}_p \cdot d\vec{S}$$

$\vec{j}_p(r, \theta, z) = j_p(r) \vec{e}_r$
↑↑ inv trans & inv rotat°



$$\Phi_2 = j_p(r) \iint_{\Sigma_{\text{lat}}} dS \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r$$

$\Sigma_{\text{lat}} = 2\pi r L$

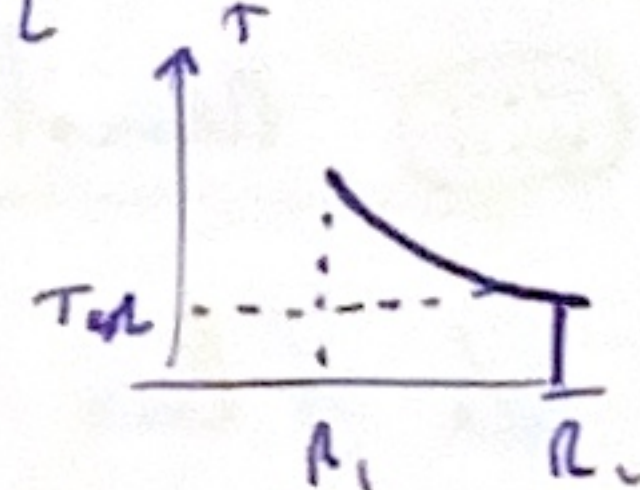
Soit $j_p(r) = \frac{\Phi_2}{2\pi r L} \cdot \frac{1}{r} \propto \frac{1}{r}$ cylindrique.

or Loi de Fourier : $j_p(r) = -\lambda_p \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\Phi_2}{2\pi r L} \cdot \frac{1}{r}$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\Phi_2}{\lambda_p 2\pi L} \cdot \frac{1}{r}$

Soit $T(r) = -\frac{\Phi_2}{2\pi \lambda_p L} \ln(r) + C$ et $T(R_2) = T_{\text{ext}}$ $T_{\text{ext}} = -\frac{\Phi_2}{2\pi \lambda_p L} \ln(R_2) + C$

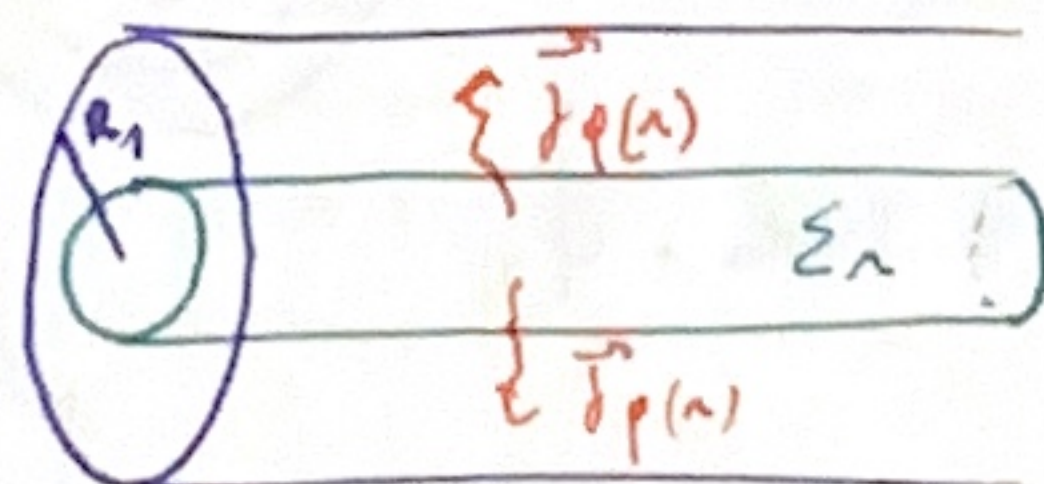
$T(r) \searrow \text{qnd } r \nearrow$

$$T(r) - T_{\text{ext}} = -\frac{\Phi_2}{2\pi \lambda_p L} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) > 0$$



(iii) Dans la cuivre

$0 \leq r \leq R_1$



$\Phi_1 = \iint j_p(r) dS = \Phi_1(r)$ ne sert que la puissance produite dans (Σ_r)

$P_{\text{vd}} = \frac{R I^2}{\pi R_1^2 L}$

$P_{\Sigma_r} = \pi r^2 \times \frac{\Phi_2}{\pi R_1^2 L} = \Phi_2 \cdot \left(\frac{r}{R_1}\right)^2$

$P_{\Sigma_r}(0) = 0 (\checkmark)$
 $P_{\Sigma_r}(R_1) = \Phi_2 (\checkmark)$

$P_{\Sigma_r} \propto r^2 (\checkmark)$

$\Phi_1(r) = \Phi_2 \left(\frac{r}{R_1}\right)^2$

Soit $\Phi_1(r) = \iint j_p(r) dS = j_p(r) \iint dS \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = j_p(r) 2\pi r L$

$j_p(r) = \frac{\Phi_1(r)}{2\pi r L} = \frac{\Phi_2 \frac{r^2}{R_1^2}}{2\pi r L} = \frac{\Phi_2}{2\pi L R_1^2} \cdot r = j_q(r) \quad r < R_1$

$$\vec{j}_p(r) = -\lambda_c \vec{\nabla} T \quad j_q(r) = -\lambda_c \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\phi_2}{2\pi L R_1^2} r$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\phi_2}{2\pi \lambda_c L R_1^2} r \Rightarrow T(r) = C^t - \frac{\phi_2}{4\pi \lambda_c L R_1^2} r^2$$

$$C^t = T(0)$$

(Température en centre)

Reconnement des solutions

en $r = R_1$ il faut $T_c(R_1) = T_g(R_1)$ et $j_q^c(R_1) = j_q^g(R_1)$

Continuité du flux

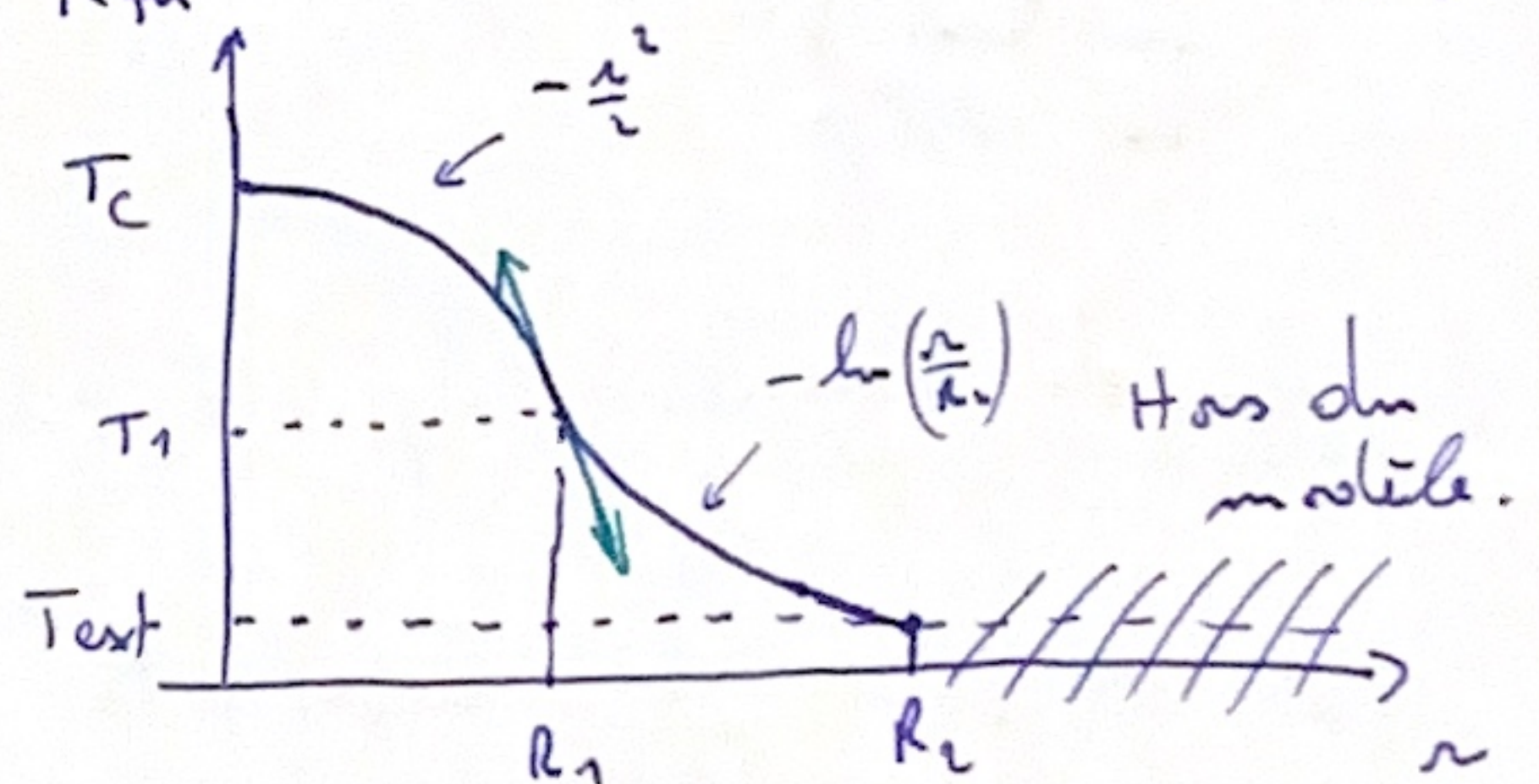
Si $R_{ext}(r) \rightarrow \infty$

$$\left. \begin{aligned} j_q^c(r) &= \frac{\phi_2}{2\pi L R_1^2} r \\ j_q^g(r) &= \frac{\phi_2}{2\pi L R_1} \end{aligned} \right\} \checkmark \quad T_c(R_1) = C^t - \frac{\phi_2 R_1^2}{4\pi \lambda_c L R_1^2} = T_g(R_1) = T_{ext} - \frac{\phi_2}{2\pi L \lambda_g} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

Soit $C^t = T_c = T_{ext} + \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi L \lambda_g}}_{R_{th}} \cdot \phi_2 + \frac{1}{4\pi \lambda_c L} \phi_2$

$$T_1 = T_{ext} + \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi^2 R^2 \gamma \lambda_g} I^2$$

$$T_c = T_1 + \frac{I^2}{4\pi^2 R^2 \gamma \lambda_c}$$



DANGER

Résistance thermique de la gaine

Le flux dans la gaine est constant.

$$\Delta T = R_{th} \cdot \phi_{th}$$

$$T_1 - T_{ext} = R_{th} \cdot \phi_2$$

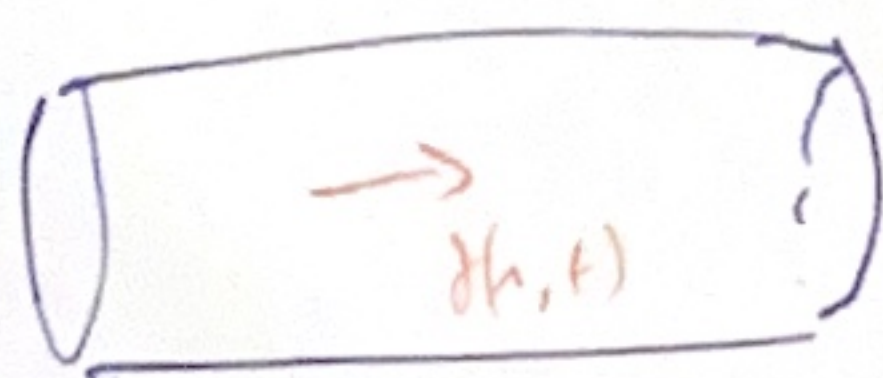
$$\Rightarrow R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi L \lambda_g}$$

Analogie élec TD

$$R_{elec} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\gamma \cdot 2\pi h}$$



3^{de} "Effet de peau" thermique



$$\vec{j} = j_r(r) \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

→ Trouver $j_r(r)$
résistance?